

Konsistenz-Monitoring für OR-Programme und Wissensbasen mit Hilfe von Petrinetzen, Teil I: Grundlagen*

Stephan Zelewski**

Stichworte: Expertensysteme, Konsistenz, logische Modellierung, Netztheorie, Operations Research, Petrinetze, Wissensbasen

Zusammenfassung: Auf der Basis von Petrinetzen wird ein Modellierungskonzept für Probleme vorgestellt, deren Struktur wesentlich von logischen Sachverhalten geprägt wird. Es dient speziell der natürlichen Repräsentation aussagenlogischer Zusammenhänge und der Überwachung ihrer Konsistenz. Die grundlegenden Konzepte für die Konstruktion von Netzmodellen sowie für die Invarianten- und Faktnetzanalyse werden im hier angeführten ersten Teil dargelegt. Aspekte der Lösungseffizienz werden nicht betrachtet. Der zweite - später folgende - Teil wird Anwendungsmöglichkeiten der Netztheorie für Aufgaben des Konsistenz-Monitoring anhand eines Beispiels aus dem Gebiet der Jahresabschlußgestaltung von Aktiengesellschaften verdeutlichen. Ein Ausblick wird sich mit dem Einsatz von Netzmodellen für die Konsistenzüberwachung von Expertensystemen widmen.

Consistency-monitoring for OR-programs and knowledge bases supported by Petri nets, part I: fundamentals

Key-words: consistency, expert systems, knowledge bases, logic modelling, net theory, operations research, Petri nets

Abstract: A modelling concept based on Petri nets is discussed for problems whose structures are essentially determined by logical aspects. The net approach supports the natural representation of problem descriptions expressed by propositional logic and the monitoring of its consistency. The basic concepts for the construction of net models and for the analyses of invariants and facts are considered in this first part. Questions of efficient problem solutions are neglected. The second - subsequent - part will illustrate possible applications of net theory for consistency monitoring. An example concerns the design of annual balance sheets of stock corporations with regard to corporate income tax. An outlook examines the use of net models for monitoring the consistency of expert systems.

* Weiterführende Darlegungen und ausführlichere Erläuterungen enthält der Arbeitsbericht Nr. 28 des Kölner Industrieseminars: "Petrinetze für die Konstruktion und Konsistenzanalyse von logisch orientierten Problembeschreibungen".

** Dr. Stephan Zelewski, Universität Köln, Industrieseminar, Albertus-Magnus-Platz, D-5000 Köln 41.

1 Die Bedeutung logischer Aspekte für Entscheidungsmodelle

Probleme des Operations Research (OR), deren Struktur wesentlich von logischen Sachverhalten bestimmt wird, lassen sich nur schwer mit konventionellen OR-Programmen modellieren. Es werden dann binäre Entscheidungs- und Indikatorvariablen sowie zusätzliche Nebenbedingungen erforderlich ([3],[7],[18]). Die resultierenden Entscheidungsmodelle muten artifizuell an und verursachen erhebliche Schwierigkeiten bei der Modellösung (Näheres dazu in [20]). Der tiefere Grund für diese Probleme liegt in der rudimentären impliziten Verknüpfungslogik der Nebenbedingungen von OR-Programmen. Es wird stets vorausgesetzt, diese müßten durch jede zulässige Lösung simultan erfüllt werden, also konjunktiv miteinander verknüpft sein. Adjunktionen, Disjunktionen und Subjunktionen werden ebensowenig berücksichtigt wie Negationen. Daher bereitet es erhebliche Probleme, nicht-konjunktive Beziehungen zwischen Nebenbedingungen oder negierte Nebenbedingungen zu formulieren. Selbst wenn es gelingt, solche logischen Beziehungen auf indirekte Weise in OR-Programmen abzubilden, so stellt sich immer noch der Nachweis der Modellkonsistenz als diffizil heraus. Gleiches gilt a fortiori für die Lokalisierung der Ursachen inkonsistenter Problemmodellierungen und deren Beseitigung.

Dennoch wird die Beschäftigung mit der Modellierung von logischen Sachverhalten durch zwei Gründe nahegelegt. Erstens fließt in Modelle des Operations Research eine Vielzahl solcher Sachverhalte ein, ohne daß ihre logische Natur immer explizit deutlich wird. (Ausführlich geht hierauf [18], S. 163ff., ein.) Beispielsweise stellen Ausschließlichkeits- und Vollständigkeitsbedingungen bei Zuordnungsmodellen logische Beziehungen zwischen den Zuordnungsalternativen dar. Zweitens kann die derzeit diskutierte Annäherung zwischen Operations Research und Erforschung der Künstlichen Intelligenz (KI) dazu führen, seitens des Operations Research verstärkt mit expliziten logischen Problembeschreibungen konfrontiert zu werden (vgl. [12],[17]). So wird z.B. beabsichtigt, Lösungsalgorithmen des Operations Research in Expertensysteme einzubinden. Solche Expertensysteme sollen als intelligente Modell- und Methodenbanksysteme ihre Benutzer bei der Problembewältigung u.a. dadurch beraten, daß sie problemadäquate Modellklassen und Lösungsalgorithmen empfehlen. Diese Integration von Operations Research und Künstlicher Intelligenz wird verstärkt dazu führen, Problembeschreibungen in logisch repräsentiertes Expertenwissen über Anwendungsvoraussetzungen und Eignung alternativer Modelle oder Methoden einzubetten.

Vor allem die zunehmende Verbreitung von regelbasierten Expertensystemen läßt es angeraten erscheinen, OR-Programme um die Modellierung logischer - und nicht nur implizit konjunktiv verknüpfter - Sachverhalte zu bereichern. Denn die Produktionsregeln solcher Expertensysteme besitzen den logischen Charakter von Subjugaten $A_1 \rightarrow A_2$, die auf Negationen und Adjunktionen beruhen. Daher lassen sich die Produktionsregeln auch dann nicht unmittelbar in OR-Programme einbinden, wenn ihre atomaren Komponenten A_1 und A_2 im arithmetischen Kalkül aus Variablen und Funktionen direkt ausgedrückt wären. Auf solche regelartigen Wissensformulierungen wird im späteren Anwendungsteil zurückgekommen.

Ein möglicher Ansatz, der zu problemadäquateren, weniger komplexen, transparenteren und natürlicher anmutenden Repräsentationen von logischen Problemaspekten führen könnte, besteht in der Konstruktion graphischer Problembeschreibungen. Hierbei wird von den Erkenntnissen der kognitiven Psychologie ausgegangen, daß graphische Modellierungen kompakter und verständlicher ausfallen als die "Variablen-Konglomerate" von konventionellen OR-Programmen. Darüber hinaus werden zwei zusätzliche Anforderungen an graphische Modellierungskonzepte gestellt. Erstens sollte es möglich sein, aus der natürlichsprachlichen Beschreibung eines Problems

die Repräsentation seiner logischen Aspekte systematisch ableiten zu können (konstruktives Postulat). Zweitens ist es wünschenswert, daß die graphische Modellformulierung mit der Hilfe von linearen arithmetischen Kalkülen untersucht werden kann (analytisches Postulat). Denn solche Kalküle haben sich bei der automatengestützten Modellanalyse vielfach als effiziente Untersuchungsinstrumente bewährt.

2 Konsistenzmonitore für die Validierung und Rekonstruktion von Modellen

Der Konsistenzbegriff wird zunächst in dem engen Sinn verstanden, daß ein Modell frei von logischen Widersprüchen (Kontradiktionen) ist. Daneben läßt sich der Konsistenzbegriff auch im erweiterten Sinn der Modellintegrität auffassen. Die Widerspruchsfreiheit ist eine notwendige, aber keine hinreichende Voraussetzung der Integrität eines Modells. Vielmehr lassen sich zusätzliche Integritätsbedingungen wahlfreien Inhalts formulieren, um die Korrektheit eines Modellzustands zu spezifizieren (Näheres bei [13], S. 303ff.). Beispielsweise kann das Handlungsmodell eines Expertensystems Handlungsempfehlungen umfassen, die sich zwar aus formallogischer Sicht nicht widersprechen, aber dennoch bei inhaltlicher Betrachtung gegenseitig ausschließen. Es ist möglich, diese materiale Ausschließlichkeitsbeziehung als Integritätsbedingung für die betroffenen Handlungsempfehlungen durch die Negation ihrer simultanen Geltung auszudrücken. Solche Integritätsbedingungen stellen eine bedeutsame Erweiterung konventioneller OR-Programme dar.

Das Überwachen (Monitoring) der Modellkonsistenz kann sich auf drei Ebenen erstrecken. Auf der ersten Ebene der Konsistenzanalyse wird nur untersucht, *ob* ein Modell konsistent ist. Im positiven Fall ist die Konsistenzanalyse bereits abgeschlossen. Falls sich jedoch die Existenz mindestens einer Kontradiktion nachweisen läßt, wird auf der zweiten Ebene der Inkonsistenzdiagnose untersucht, *welche* Konstituenten der Problemmodellierung die nachgewiesenen Inkonsistenzen verursacht haben. Schließlich wird die dritte Ebene der Konsistenzüberwachung als Inkonsistenztherapie beschritten, wenn aus der Erkenntnis der Inkonsistenzursachen Maßnahmen abgeleitet werden, um das betrachtete Modell in eine konsistente Variante zu überführen.

Ein Entscheidungsmodell ist strukturell inkonsistent, wenn die Modellstruktur mindestens eine Kontradiktion oder Integritätsverletzung enthält. Die Lösungsmenge eines solchen Modells ist leer. Die strukturelle Modellinkonsistenz gilt a priori für jede denkmögliche Variablenbelegung durch Konstanten, also für jeden Modellzustand. Ein Entscheidungsmodell erweist sich dagegen als situativ inkonsistent, wenn es zwar strukturell konsistent ist, aber im jeweils betrachteten Modellzustand - der "Situation" - mindestens eine Kontradiktion oder Integritätsverletzung umfaßt. Die situative Modellinkonsistenz tritt nur a posteriori ein, wenn der zugehörige Modellzustand durch die entsprechende Variablenbelegung mit Konstanten verwirklicht wird. Jeder situativ inkonsistente Modellzustand repräsentiert eine unzulässige Lösung des betrachteten Entscheidungsproblems. Ein Konzept, das mindestens den Nachweis struktureller und situativer Inkonsistenzen erlaubt, wird als Konsistenzmonitor bezeichnet.

Wenn ein Entscheidungsmodell genutzt wird, um eine optimale Lösung für ein Entscheidungsproblem zu suchen, läßt sich ein Konsistenzmonitor verwenden, um die Lösungssuche auf zulässige Lösungen auszurichten. Zunächst wird überprüft, ob das Entscheidungsmodell strukturell konsistent ist. Wenn dies nicht der Fall ist, wird die Lösungssuche erfolglos abgebrochen, weil die Menge zulässiger Problemlösungen leer ist. Andernfalls wird die Lösungssuche fortgesetzt. Dabei erfolgt eine permanente Überwa-

chung hinsichtlich situativer Inkonsistenzen. Wird eine solche mittels der Konsistenzanalyse entdeckt, kann auf das Instrument der Inkonsistenzdiagnose zurückgegriffen werden, um die Ursache der Inkonsistenz zu lokalisieren. Aufgrund der hierbei gewonnenen Erkenntnisse läßt sich im Rahmen der Inkonsistenztherapie die Wiederaufnahme der Lösungssuche durch gezielte Inkonsistenzbeseitigung so steuern, daß möglichst rasch zu einer zulässigen Problemlösung zurückgekehrt wird. Ebenso ist es möglich, die Inkonsistenzdiagnose und -therapie zu benutzen, um ein strukturell inkonsistentes Entscheidungsmodell durch Beseitigen seiner Strukturdefekte in ein konsistentes zu transformieren.

Konventionelle OR-Programme tragen zum Konsistenz-Monitoring von Entscheidungsmodellen nur wenig bei. Die Konsistenzanalyse bereitet zwar im Hinblick auf Kontradiktionen keine Schwierigkeiten. Kontradiktorische Modellstrukturen oder -zustände werden als leere Lösungsmengen bzw. Unzulässigkeit der zustandsspezifischen Modellösungen aufgewiesen. Doch lassen sich Inkonsistenzen, die als Folge von Integritätsverletzungen auftreten, oftmals gar nicht oder nur mittelbar und mit erheblichem Aufwand untersuchen. Dies beruht auf der oben erläuterten Unmöglichkeit, nicht-konjunktive Integritätsbedingungen in OR-Programmen direkt abzubilden. Stattdessen ist es nur möglich, diese Bedingungen mit der Hilfe von Binärvariablen und zusätzlichen Nebenbedingungen in konjunktiv verknüpfte Hilfskonstrukte zu transformieren. Eine Integritätsverletzung läßt sich dann indirekt als Kontradiktion im Kontext dieser artifiziellen Hilfskonstrukte nachweisen.

Die Inkonsistenzdiagnose erweist sich in OR-Programmen als noch unbefriedigender. Denn der Inkonsistenznachweis zeigt nur auf, daß eine Kontradiktion im analysierten OR-Programm existiert. Die Ursachen der Kontradiktion werden hierdurch aber nicht lokalisiert. Ein solcher Existenzbeweis besitzt keinen konstruktiven Charakter, weil aus der Beweisführung nicht unmittelbar die Inkonsistenzursache rekonstruiert werden kann. Aus dem Wissen, daß eine Modellstruktur inkonsistent ist, weil das zugehörige OR-Programm die leere Lösungsmenge besitzt, folgt noch kein Hinweis darauf, welche Modellkomponenten diese Inkonsistenz verursacht haben. Hilfskonzepte können die Inkonsistenzursache zwar aufspüren. Doch erweisen sie sich als umständlich und enthalten prinzipielle Unzulänglichkeiten, die in [20] näher dargelegt werden.

Aufgrund der voranstehend skizzierten Defizite konventioneller OR-Programme wird der Frage untersucht, ob sich das alternative Modellierungskonzept der Petrinetze für das Konsistenz-Monitoring von logisch orientierten Problembeschreibungen besser eignet. Die Ausführungen konzentrieren sich auf die beiden ersten Funktionen von Konsistenzmonitoren - die Konsistenzanalyse und die Inkonsistenzdiagnose. Für die Auswahl von Petrinetzen spricht zunächst, daß sie als graphisches Modellierungskonzept die Anfangsvermutung rechtfertigen, eine kompakte und transparente Repräsentation logischer Sachverhalte zu ermöglichen. Darüber hinaus werden Petrinetze zunehmend für die Wissensrepräsentation auf logischer Basis herangezogen (vgl. z.B. [1],[2]),[5]. Dies eröffnet angesichts des oben angesprochenen Zusammenrückens von Operations Research und KI-Forschung die Perspektive, durch Petrinetze eine Schnittstelle zwischen OR-Programmen und Wissensbasen von Expertensystemen einzurichten.

Schließlich wird aufgezeigt werden, daß sich Petrinetze durch folgende Charakteristika als Konzept für die Modellierung der logischen Aspekte von Problembeschreibungen empfehlen:

- Durch Petrinetze können alle logischen Sachverhalte dargestellt werden (Vollständigkeit).

- Die Repräsentation logischer Sachverhalte kann aus einer natürlich-sprachlichen Umschreibung dieser Sachverhalte systematisch abgeleitet werden. Hierdurch wird das o.a. konstruktive Postulat erfüllt (Konstruktivität).
- Die Darstellung erfolgt in "natürlicher" Weise, d.h. die Sachverhalte lassen sich vom Modellkonstrukteur in einer transparenten und problemadäquaten Art formulieren (Natürlichkeit).
- Es existiert ein Schema, nach dem die Petrinetze automatisch in lineare arithmetische Problembeschreibungen transformiert werden können. Diese arithmetischen Transformate lassen sich ihrerseits mit leistungsfähigen automatengestützten Instrumenten aus dem Bereich der Linearen Algebra untersuchen. Auf diese Weise wird das o.a. analytische Postulat eingelöst (Programmierbarkeit).

Die Abstimmung zwischen lösungsorientierten OR-Programmen und konsistenzbezogenen Netzmodellen wird hier nicht näher untersucht. Sie kann allerdings Probleme sui generis aufwerfen, die in [20], Abschnitt 6, näher behandelt werden. Darüber hinaus vermag sie erhebliche Ressourcen zu binden. Auch diese potentielle Beeinträchtigung der Lösungseffizienz von OR-Programmen bleibt hier ausgeklammert. Es wird nur das Konsistenz-Monitoring, nicht aber dessen Einbettung in ein umfassenderes Konzept der Modellkonstruktion und -lösung beleuchtet.

3 Abbildung logischer Sachverhalte auf Netzmodelle

3.1 Netztheoretische Grundlegung

Die nachfolgenden Erörterungen konzentrieren sich auf eine aussagenlogische Darstellungsweise. Sie können durch Petrinetze in der speziellen Variante der Stelle/Transition-Netze vollständig abgebildet werden. Dies bedeutet keine wesentliche Einschränkung, weil die vorgestellten Beiträge der Netztheorie nicht nur für die Aussagen-, sondern auch für die Prädikatenlogik (1. Ordnung) gelten. Darüber hinaus wird die Einschränkung auf aussagenlogische Kontexte im abschließenden Ausblick auf Expertensysteme zugunsten der Prädikatenlogik wieder aufgelockert.

Ein Stelle/Transition-Netz läßt sich arithmetisch als ein 6-Tupel $N=(S,T,F,W,K,M_0)$ definieren ([6], [15], S. 69ff., [16]), $S=\{s_j:j=1,\dots,J\}$ und $T=\{t_i:i=1,\dots,I\}$ sind endliche, nicht-leere und disjunkte Mengen zweier unterschiedlicher Knotentypen: der Stellen s_j bzw. der Transitionen t_i . Stellen werden graphisch als Kreise repräsentiert, auf denen sich bewegliche Objekte - sogenannte "Marken" - befinden können. Transitionen t_i sind in der Lage, die Verteilung dieser Marken über den Stellen des Netzes zu verändern. Während eines "Schaltakts" zieht eine Transition Marken von ihren vorgelagerten Stellen ab und legt auf ihren nachgelagerten Stellen ebensolche Marken wieder ab.

Die Flußrelation $F \subseteq ((S \times T) \cup (T \times S))$ aus geordneten 2-Tupeln (s_j, t_i) oder (t_i, s_j) bestimmt, in welcher Weise Stellen und Transitionen miteinander benachbart sind. Jedes Element der Flußrelation wird graphisch als eine gerichtete Kante repräsentiert. Ihre Orientierung entspricht der Richtung des schaltbedingten Markenflusses zwischen den benachbarten Knoten. Das Ausmaß des Markenflusses legt die Gewichtsfunktion $W: ((S \times T) \cup (T \times S)) \rightarrow \mathbb{N}_0$ fest. Bei der Repräsentation logischer Sachverhalte spielen nur Einheitsflüsse von je einer Marke entlang jeder Kante eine Rolle. Daher gilt vereinfachend:

$$W: (S \times T) \cup (T \times S) \rightarrow \{0, 1\}$$

$$(x_a, x_b) \rightarrow W(x_a, x_b) = \begin{cases} 1 & ; \text{ falls } (x_a, x_b) \in F \\ 0 & ; \text{ falls } (x_a, x_b) \notin F. \end{cases}$$

Die Inzidenzstruktur (S, T, F, W) eines Netzes N läßt sich in arithmetischer Weise als Inzidenzmatrix C mit I Spalten für die Transitionen $t_i \in T$ und J Zeilen für die Stellen $s_j \in S$ ausdrücken. Jeder Koeffizient $c_{i,j}$ zeigt an, ob Transition t_i und Stelle s_j benachbart sind. Im positiven Fall gibt er die Richtung und das Gewicht ihrer Verbindungskante an:

$$c_{i,j} = \begin{cases} W(t_i, s_j) = 1 & ; \text{ falls } (s_j, t_i) \notin F \wedge (t_i, s_j) \in F \\ 0 & ; \text{ falls } (s_j, t_i) \in F \wedge (t_i, s_j) \in F \\ 0 & ; \text{ falls } (s_j, t_i) \notin F \wedge (t_i, s_j) \notin F \\ -W(s_j, t_i) = -1 & ; \text{ falls } (s_j, t_i) \in F \wedge (t_i, s_j) \notin F \end{cases}$$

Das partielle 3-Tupel $TOP_N = (S, T, F)$ ist die topologische Struktur des Netzes N . Sie umfaßt nur die Knoten und Kanten dieses Netzes, die einen gerichteten Graphen bilden. (Bezüglich spezieller Anforderungen an und Notationen für die Topologie von Netzen wird auf die o.a. Literatur zu Stelle/Transition-Netzen sowie [20], Abschnitt 3.1, verwiesen.)

Die Kapazitätsfunktion K ordnet jeder Stelle die Anzahl (Kapazität) von Marken zu, die sich auf ihr im selben Zeitpunkt maximal befinden dürfen. Im Kontext logischer Sachverhaltsdarstellungen wird für jede Stelle s_j die uniforme Markenzahl $K(s_j) = 1$ angenommen, d.h. es gilt vereinfachend: $K: S \rightarrow \{1\}$. Daher wird die Kapazitätsfunktion bei der weiteren Netzanalyse nicht mehr explizit berücksichtigt, geht aber implizit in die Schaltregel für Transitionen ein. Die Ausgangsmarkierung $M_0: S \rightarrow N_0$ schreibt jeder Stelle s_j eine Anzahl $M_0(s_j)$ von Marken zu, die sich auf ihr im Ausgangszustand des Netzes befinden. Mit dieser Markierungsfunktion M_0 korrespondiert der äquivalente Markierungsvektor \underline{M}_0 mit $\underline{M}_0^{tr} = (M_0(s_1), \dots, M_0(s_j))$. Er weist in seiner j -ten Komponente die Markenzahl $M_0(s_j)$ der Stelle s_j unter der Ausgangsmarkierung M_0 aus. Analog zur Ausgangsmarkierung M_0 sind für ein Netz beliebige Belegungen seiner Stellen mit Marken als Netzmarkierungen $M_r: S \rightarrow N_0$ definiert.

Die dynamische Netzstruktur begründet den wesentlichen Unterschied zwischen konventionellen Graphen, in denen Veränderungen nicht unmittelbar ausgedrückt werden können, und Petrinetzen, in denen Veränderungen durch Schalten von Transitionen als Markenflüsse realisiert werden. Die dynamische Netzstruktur wird durch die Ausgangsmarkierung M_0 als Randbedingung und durch die Schaltregel der Transitionen festgelegt. Unter den oben getroffenen Vereinfachungen von Stelle/Transition-Netzen für die Repräsentation logischer Sachverhalte legt die Schaltregel fest, daß eine Transition genau dann aktiviert ist, wenn jede ihrer Eingangsstellen genau eine Marke trägt und jede ihrer Ausgangsstellen unmarkiert ist. Eine aktivierte Transition kann geschaltet werden, braucht es aber nicht. Ohne Aktivierung darf keine Transition geschaltet werden. Wenn eine aktivierte Transition tatsächlich geschaltet wird, entfernt sie von jeder ihrer Eingangsstellen genau eine Marke und legt auf jeder ihrer Ausgangsstellen genau eine Marke ab. Ihre Eingangsstellen sind danach unmarkiert, ihre Ausgangsstellen dagegen markiert. Diese Schaltverhältnisse lassen sich formal ausdrücken mit Hilfe einer Aktivierungsbedingung $AKT(t_i, \underline{M}_r)$, eines Schaltvektors \underline{t}_i und einer Schaltregel SR . Für beliebige Transitionen t_i und Markierungen \underline{M}_r mit $r \in N_0$ gilt:

$$\text{AKT}(t_1, \underline{M}_r) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (\bigwedge (s_j \in (V(t_1) - N(t_1))) : M_r(s_j) = 1) \wedge \dots \\ (\bigwedge (s_j \in (N(t_1) - V(t_1))) : M_r(s_j) = 0) \end{array} \right.$$

$$\underline{t}_1^{tr} = (c_x : x=1, \dots, I \wedge c_x = 1 \Leftrightarrow x=i \wedge c_x = 0 \Leftrightarrow x \neq i)$$

$$\text{SR}: T \times N_0^J \rightarrow N_0^J$$

$$(t_1, \underline{M}_r) \rightarrow \underline{M}_f = \underline{M}_r + C \cdot \underline{t}_1 ; \text{ falls } \text{AKT}(t_1, \underline{M}_r)$$

Der Sachverhalt, daß die Transition t_1 die Aktivierungsbedingung $\text{AKT}(t_1, \underline{M}_r)$ erfüllt und die aktuelle Markierung \underline{M}_r in die Folgemarkierung \underline{M}_f gemäß der Schaltregel SR transformiert, wird durch die Notation $\underline{M}_r[t_1] \underline{M}_f$ ausgedrückt.

Jedes zulässige Netzverhalten geht aus der Ausgangsmarkierung \underline{M}_0 des Netzes hervor, indem die Schaltregel SR wiederholt angewendet wird. Alle Markierungen \underline{M}_r , die auf diese Weise aus der Ausgangsmarkierung \underline{M}_0 durch rekursive Schaltakte abgeleitet werden können, bilden zusammen mit der Ausgangsmarkierung die Menge aller erreichbaren Markierungen. Eine Transition t_1 , die unter keiner erreichbaren Markierung aktiviert ist, wird als tote Transition bezeichnet. Ein Fakt ist eine Transition, die als tot postuliert wird. Dies entspricht einem kategorischen Aktivierungsverbot für Fakten. Wenn alle Transitionen eines Netzes als Fakten interpretiert werden, liegt ein Faktnetz vor ([15], S. 63ff.).

Das rekursive Schaltverhalten eines Netzes läßt sich unter den o.a. Einschränkungen durch eine sequentielle Schaltfolge $SF_h = \langle t_{1(1)}, t_{1(2)}, \dots, t_{1(P_h)} \rangle$ beschreiben. Bei der Ausführung der Schaltfolge SF_h werden die - nicht notwendig verschiedenen - Transitionen $t_{1(p)}$ mit $p=1, \dots, P_h$ und $P_h \in N_+$ in der angeführten Reihenfolge geschaltet. Der Schaltvektor \underline{t}_h mit $\underline{t}_h^{tr} = (c_i : i=1, \dots, I)$ gibt mit jeder seiner Komponenten c_i an, wie oft die Transition $t_i \in T$ in der Schaltfolge SF_h geschaltet wird. Wenn eine Schaltfolge SF_h unter der Startmarkierung \underline{M}_r begonnen wird, bei jeder Schaltregel-Anwendung die zugehörige Aktivierungsbedingung erfüllt ist und schließlich die Zielmarkierung \underline{M}_f erreicht wird, folgt aus der rekursiven Schaltregel-Anwendung: $\underline{M}_f = \underline{M}_r + C \cdot \underline{t}_h$. Die aufeinander folgenden Aktivierungen aller Transitionen aus der Schaltfolge SF_h und die entsprechenden Transformationen der Startmarkierung \underline{M}_r in die Folgemarkierung \underline{M}_f werden durch die Notation $\underline{M}_r[SF_h] \underline{M}_f$ dargestellt. Der Teilaspekt, daß alle Transitionen aus der Schaltfolge schaltregelgerecht aktiviert sind, wird vereinfacht als Aktivierungsbedingung $\text{AKT}(SF_h, \underline{M}_r)$ der Schaltfolge SF_h unter der (Start-)Markierung \underline{M}_r angesprochen.

Invarianten sind spezielle T- oder S-Vektoren (Näheres zur Invarianten von Netzen bei [9], S. 148ff., [15], S. 88ff.). Ein T-Vektor ist ein I-stelliger ganzzahliger Spaltenvektor \underline{t}_h mit $\underline{t}_h^{tr} = (c_{h,i} : i=1, \dots, I)$, dessen Komponenten $c_{h,i}$ mit Transitionen $t_i \in T$ korrespondieren. Entsprechend stellt ein S-Vektor einen J-stelligen ganzzahligen Spaltenvektor \underline{s}_h mit $\underline{s}_h^{tr} = (c_{h,j} : j=1, \dots, J)$ dar, dessen Komponenten $c_{h,j}$ mit Stellen $s_j \in S$ korrespondieren. Ein T- oder S-Vektor heißt semi-positiv, wenn keine seiner Komponenten kleiner als Null und mindestens eine seiner Komponenten größer als Null ist. Er wird dagegen als trivial bezeichnet, wenn alle seine Komponenten Null betragen. Eine T-Invariante ist ein T-Vektor, für den $C \cdot \underline{t}_h = \underline{0}$ gilt. Eine S-Invariante ist ein komplementärer S-Vektor, der die Gleichung $C^{tr} \cdot \underline{s}_h = \underline{0}$ erfüllt.

Eine semi-positive T-Invariante \underline{t}_h läßt sich als Schaltvektor einer Schaltfolge SF_h interpretieren. Allerdings wird hierbei nur die Schaltwirkung dieser Folge gemäß der Abbildungsvorschrift der Schaltregel SR berücksichtigt. Die Aktivierungsbedingung, die der Schaltregel den Charakter einer nur partiell definierten Funktion aufprägt, wird bei dieser Deutung einer T-Invariante nicht erfaßt. Hieraus können Schwierigkeiten entstehen, die später im Zusammenhang mit dem Netztheorem für die Konsistenzanalyse von Netzmodellen näher erörtert werden.

Für jede semi-positive T-Invariante t_h ist ein charakteristisches Subnetz SN_h definiert. Es wird aus der Inzidenzstruktur (S, T, F, W) des zugrundeliegenden Netzes N dadurch gebildet, daß nur noch diejenigen Transitionen t_i beachtet werden, die in der Schaltvektor-Interpretation der T-Invarianten t_h mindestens einmal geschaltet werden. Diese Transitionen werden in der T-Invariante t_h durch Komponenten $ch_i > 0$ gekennzeichnet und zur invariantenspezifischen Unterstützungsmenge TU_h zusammengefaßt: $TU_h = \{t_i \in T : ch_i > 0\}$. Hinzu kommen alle Stellen und Kanten aus dem Netz N , die zu den ausgezeichneten Transitionen inzident bzw. adjazent sind. Alle übrigen Transitionen, Stellen und Kanten werden aus dem Subnetz SN_h eliminiert. Kantengewichte und Ausgangsmarkierung werden in entsprechender Weise nur auf die nicht-eliminierten Kanten bzw. Stellen unverändert übertragen, andernfalls fortgelassen.

3.2 Konstruktion logisch fundierter Netzmodelle

Auf der voranstehend ausgeführten netztheoretischen Grundlage läßt sich jede Formel eines aussagenlogischen Kalküls auf ein äquivalentes Stelle/Transition-Netz abbilden. Die Transformation von aussagenlogischen Formeln (Aussagen) in repräsentierende Netze läßt sich durch eine Gruppe übersichtlicher Konstruktionsregeln systematisch ausführen. Anstatt diese hier im einzelnen zu betrachten - vgl. dazu [20], Abschnitt 3.2 -, wird sofort auf eine abstraktere Konstruktionsregelmengenzurückgegriffen. Sie besitzt den Vorzug, *alle* Aussagen beliebiger Komplexität durch genau *eine* homogene Konstruktionsvorschrift auf äquivalente Netzmodelle abzubilden.

Ausgangspunkt ist das aussagenlogische Theorem, daß sich jede endliche, beliebig komplexe Aussage in ihrer konjunktiven Normalform äquivalent darstellen läßt. Eine solche Komplexaussage A besteht aus der konjunktiven Verknüpfung einer endlichen Anzahl von Klauseln K_i mit $i=1, \dots, I$ und $I \in \mathbb{N}_+$: $A \Leftrightarrow K_1 \wedge \dots \wedge K_I$. Jede Klausel K_i ist eine endliche Adjunktion aus paarweise verschiedenen Literalen $L_{i,j(p)}$ mit $p=1, \dots, P_i$ und $P_i \in \mathbb{N}_+$: $K_i \Leftrightarrow L_{i,j(1)} \vee \dots \vee L_{i,j(P_i)}$. Jedes Literal $L_{i,j(p)}$ ist entweder eine atomare Aussage $A_{j(p)}$ oder deren Negat $\neg A_{j(p)}$. Daher kann jede aussagenlogische Beschreibung A der logischen Aspekte eines Realproblems aus atomaren Aussagen, Literalen und Klauseln rekursiv aufgebaut werden.

Das Netz N_A , das die problembeschreibende Komplexaussage A repräsentiert, läßt sich systematisch konstruieren. Hierbei werden den atomaren Aussagen, Klauseln und Literalen aus der Komplexaussage A im Netzmodell N_A korrespondierende Stellen, Transitionen bzw. Kanten durch vier Konstruktionsregeln eineindeutig zugeordnet:

- * Jede atomare Aussage A_j aus der Aussage A wird auf eine korrespondierende Stelle s_j abgebildet. Gleiches gilt für das Negat $\neg A_j$ derselben atomaren Aussage.
- * Jeder Klausel K_i aus der Aussage A wird eine korrespondierende Transition t_i zugeordnet.
- * Jede Stelle s_j wird mit jeder Transition t_i genau dann durch eine Kante (t_i, s_j) oder (s_j, t_i) verknüpft, wenn die zugehörige Klausel K_i das Literal $L_{i,j}$ mit $L_{i,j} \Leftrightarrow A_j$ bzw. mit $L_{i,j} \Leftrightarrow \neg A_j$ enthält.
- * Stellen mit denselben Indices j werden so miteinander identifiziert, daß sie im Netz N_A jeweils nur genau einmal vorkommen.

Für jede Klausel K_i resultiert ein Teilnetz N_i , das aus der klauselspezifischen Transition t_i und P_i inzidenten Stellen $s_{j(p)}$ für die atomaren Aussagen A_j oder deren Negate besteht. Für seine topologische Struktur TOP_i gilt:

$$TOP_1 = (\{s_{j(1)}, \dots, s_{j(p_1)}\}, \{t_1\}, \{ka(s_{j(1)}, t_1), \dots, ka(s_{j(p_1)}, t_1)\})$$

Dabei bedeutet für alle $p=1, \dots, P_1$:

$$ka(s_{j(p)}, t_1) = \begin{cases} (t_1, s_{j(p)}) & ; \text{ falls } L_{1.j(p)} \Leftrightarrow A_j \\ & \text{ein Literal aus } K_1 \text{ ist} \\ (s_{j(p)}, t_1) & ; \text{ falls } L_{1.j(p)} \Leftrightarrow \neg A_j \\ & \text{ein Literal aus } K_1 \text{ ist} \end{cases}$$

Das Netzmodell N_A , das die Komplexaussage A insgesamt repräsentiert, geht aus der Vereinigung der I klauselspezifischen Teilnetze N_i hervor. Hierbei werden die Stellen, die in mehreren Teilnetzen N_i identisch vorkommen, entsprechend der letzten der o.a. vier Konstruktionsregeln miteinander identifiziert. Das resultierende vereinigte Netz N_A ist im allgemeinen zusammenhängend. Denn atomare Aussagen A_j oder deren Negate $\neg A_j$, die mit Stellen s_j korrespondieren, sind oftmals in mehreren Klauseln enthalten.

Aus der voranstehenden Konstruktionsvorschrift für Netzmodelle, die beliebige Komplexaussagen in konjunktiver Normalform repräsentieren, lassen sich die eingangs angesprochenen Netzkonstruktionen für einfache aussagenlogische Sachverhalte ableiten. So gelten folgende topologischen Netzstrukturen:

- * $TOP_j = (\{s_j\}, \{t_1\}, \{(t_1, s_j)\})$ für das Netz N_j der atomaren Aussage A_j ;
- * $TOP_{\neg j} = (\{s_j\}, \{t_1\}, \{(s_j, t_1)\})$ für das Netz $N_{\neg j}$ des Negats $\neg A_j$ der atomaren Aussage A_j ;
- * $TOP_{j \vee k} = (\{s_j, s_k\}, \{t_1\}, \{(t_1, s_j), (t_1, s_k)\})$ für das Netz $N_{j \vee k}$ der Adjunktion zweier atomarer Aussagen A_j und A_k ;
- * $TOP_{j \vee k} = (\{s_j, s_k\}, \{t_1, t_h\}, \{(s_j, t_h), (s_k, t_h), (t_1, s_j), (t_1, s_k)\})$ für das Netz $N_{j \vee k}$ der Disjunktion zweier atomarer Aussagen A_j und A_k ;
- * $TOP_{j \wedge k} = (\{s_j, s_k\}, \{t_1, t_h\}, \{(t_1, s_j), (t_h, s_k)\})$ für das Netz $N_{j \wedge k}$ der Konjunktion zweier atomarer Aussagen A_j und A_k ;
- * $TOP_{j \rightarrow k} = (\{s_j, s_k\}, \{t_1\}, \{(s_j, t_1), (t_1, s_k)\})$ für das Netz $N_{j \rightarrow k}$ der Subjunktion zweier atomarer Aussagen A_j und A_k .

Abb. 1 gibt die graphischen Darstellungen für diese einfachen Netzkonstruktionen und für die verallgemeinerte Konstruktion der Netzmodelle von Klauseln wieder.

Als Netzmodelle für die Repräsentation logischer Sachverhalte werden nur reine Netze ohne 1-Schleifen betrachtet. Solche 1-Schleifen aus einer Stelle und einer Transition, die durch zwei entgegengesetzt gerichtete Kanten zu einer "Schleife" kurzgeschlossen werden, repräsentieren aufgrund der o.a. Konstruktionsregeln tautologische Aussagen des Typs $\neg A_j \vee A_j$. Solche Tautologien sind logische Konstrukte, die keine empirisch gehaltenen Aussagen darstellen. Sie werden daher als Bestandteile logischer Beschreibungen von Realproblemen aus den folgenden Erörterungen ausgeschlossen. Falls die Beschreibung der logischen Aspekte eines Realproblems dennoch – zunächst unentdeckte – Tautologien enthält, lassen sich diese durch Aufspüren aller 1-Schleifen im repräsentierenden Netz identifizieren. Solche tautologischen 1-Schleifen lassen sich eliminieren, ohne den Wahrheitswert oder den empirischen Informationsgehalt einer logischen Problembeschreibung zu verändern ([11],[20]).

Durch die oben erläuterte Konstruktionsvorschrift für Netzmodelle wird die Vollständigkeit der Abbildung aussagenlogischer Sachverhalte auf Stelle/Transition-Netze gewährleistet. Die systematische Anwendung dieser klauselbasierten Netzkonstruktion erfüllt zugleich das eingangs aufgestellte konstruktive Postulat. Die Netze N_A , die mit Hilfe dieser Konstruktion

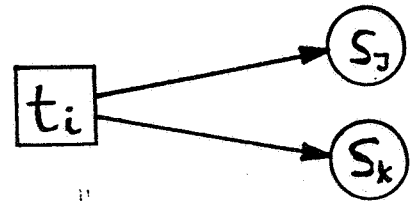
atomare Aussage A_j



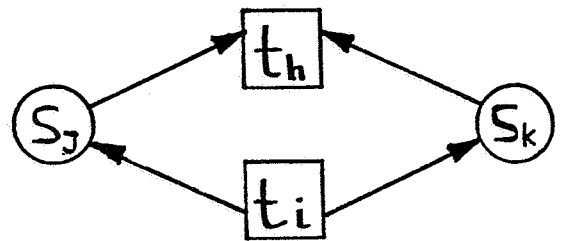
Negat $\neg A_j$ der
atomaren Aussage A_j



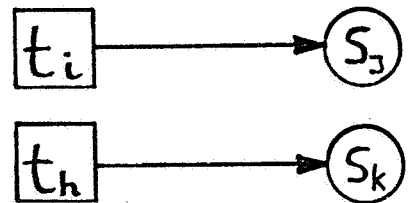
Adjugat $A_j \vee A_k$ aus den
atomaren Aussagen A_j und A_k



Disjugat $A_j \dot{\vee} A_k$ aus den
atomaren Aussagen A_j und A_k



Konjugat $A_j \wedge A_k$ aus den
atomaren Aussagen A_j und A_k



Subjugat $A_j \rightarrow A_k$ aus den
atomaren Aussagen A_j und A_k



Klausel K_i aus den
atomaren Aussagen
 $A_1, A_2, A_3,$ und A_4 :
 $K_i \Leftrightarrow (\neg A_1) \vee (\neg A_2) \vee A_3 \vee A_4$

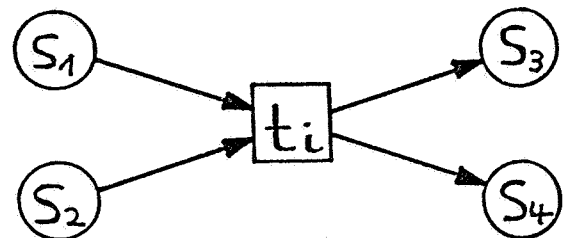


Abb. 1: Netztheoretische Basiskonstruktionen für die Modellierung aussagenlogischer Problembeschreibungen

tion gewonnen werden können, stellen die intendierten "natürlichen" Modellierungen der logischen Aspekte von Problembeschreibungen dar. Im Gegensatz zur Anwendung von binären Entscheidungs- und Indikatorvariablen sind keine artifiziellen Hilfskonstruktionen erforderlich, um die aussagenlogisch erfaßten Problemaspekte zu modellieren.

Die Natürlichkeit der Modellierung wird besonders deutlich, wenn logische Problemaspekte als "Wenn..., dann..."-Regeln formuliert worden sind. Solche Regeln sind als Entscheidungsregeln oder als Komponenten von Entscheidungstabellen in betriebswirtschaftlichen Kontexten ebenso weit verbreitet wie als Produktionsregeln im Bereich der KI-Forschung. Entscheidungs- und Produktionsregeln stellen Subjugate dar. Jedes Subjugat kann aufgrund der Äquivalenz $(A_1 \rightarrow A_2) \Leftrightarrow (\neg A_1 \vee A_2)$ in eine Klausel transformiert werden. Jede Klausel wird durch ein klauselspezifisches Teilnetz N_i repräsentiert. Folglich korrespondiert mit jeder Entscheidungs- oder Produktionsregel aus einer logischen Problembeschreibung in der äquivalenten Netzrepräsentation genau ein regelspezifisches Teilnetz N_i mit genau einer - ebenso regelspezifischen - Transition t_i . Daher ist das verallgemeinerte Konstruktionsschema auf Klauselbasis besonders geeignet, um regelbasierte Beschreibungen logischer Problemaspekte in Netzrepräsentationen umzusetzen.

4 Theoretische Grundlagen für das Konsistenz-Monitoring von Netzmodellen

4.1 Konsistenz von Netzmodellen und Quellen der Inkonsistenz

Die Konsistenzüberwachung von Netzmodellen beruht auf der Basiskonzeption, daß die logische Beschreibung eines Realproblems genau dann konsistent ist, wenn ihre Darstellung durch die Komplexaussage A den Wahrheitswert "wahr" ausweist. Umgekehrt ist die logische Problembeschreibung genau dann in sich widersprüchlich (inkonsistent), wenn die Komplexaussage A falsch ist.

Die Konstruktion von Netzmodellen stellt eine äquivalente - d.h. wahrheitswerterhaltende - Transformation der Komplexaussage A in ein repräsentierendes Netz N_A dar. Daher muß jedes Netzmodell N_A Eigenschaften besitzen, die jeweils mit den Wahrheitswerten "wahr" und "falsch" der repräsentierten Komplexaussage A eindeutig korrespondieren. Bei dieser Zuordnung lassen sich grundsätzlich zwei Betrachtungsebenen unterscheiden, die unabhängig voneinander definiert sind, aber inhaltlich zusammenhängen.

Auf der ersten Ebene werden nur Informationen über die statische Netzstruktur ausgewertet, die hier mit der topologischen Netzstruktur zusammenfällt. Dabei werden aktuelle Markierungen des Netzmodells grundsätzlich nicht beachtet. Daher wird diese Ebene auch als markierungsunabhängiges Konsistenz-Monitoring bezeichnet. Hier liefert das Netztheorem von LAUTENBACH die gesuchte eindeutige Beziehung zwischen Eigenschaften des Netzmodells N_A und Wahrheitswerten der Komplexaussage A . Auf das Netztheorem wird später ausführlich zurückgekommen.

Die zweite Ebene setzt markierte Netzmodelle voraus. Es handelt sich daher um eine markierungsabhängige Konsistenzüberwachung. Das Netzmodell N_A wurde so konstruiert, daß eine eineindeutige Beziehung besteht zwischen der Markierung seiner Stellen s_j einerseits und den Wahrheitswerten der repräsentierten atomaren Aussagen A_j oder ihren Negaten $\neg A_j$ andererseits. Daher interpretiert die Markierung des Netzmodells N_A die repräsentierte Komplexaussage A durch eine eindeutige und vollständige Wahrheitswertzuweisung zu allen ihren Komponenten. Folglich läßt sich der

Wahrheitswert der Komplexaussage A unmittelbar aus der aktuellen Netzmarkierung ableiten.

Die Komplexaussage A der betrachteten logischen Problembeschreibung wird in konjunktiver Normalform vorausgesetzt. Als metasprachliche Basisprämisse wird fortan die Konsistenz einer logischen Problembeschreibung mit der Wahrheit ihrer objektsprachlichen Komplexaussage A identifiziert. Folglich müssen für eine konsistente Problembeschreibung alle Klauseln aus der Komplexaussage A wahr sein. Darüber hinaus wird von der modelltheoretischen Basisprämisse ausgegangen, daß eine Lösung des modellierten Problems nur dann zulässig sein kann, wenn ihre Projektion auf die logische Problembeschreibung eine wahre Komplexaussage A liefert.

Eine strukturellen Inkonsistenz läßt sich daran erkennen, daß die Behauptung der Wahrheit von Komplexaussage A mit *keiner kombinatorisch möglichen* Wahrheitswertzuweisung zu ihren atomaren Aussagen widerspruchsfrei vereinbart werden kann. Dann stellt die Komplexaussage eine logisch falsche Aussage oder Kontradiktion dar, die unter allen denkmöglichen Wahrheitswertzuweisungen falsch ist. Aus der modelltheoretischen Basisprämisse folgt, daß das logisch beschriebene Problem im Fall einer strukturellen Inkonsistenz keine zulässigen Lösungen besitzen kann. Die Lösungsmenge des Gesamtmodells muß leer sein. Für die Überprüfung einer logischen Problembeschreibung auf strukturelle Inkonsistenz spielen markierungsabhängige Konsistenzanalysen grundsätzlich keine Rolle.

Eine situative Inkonsistenz liegt dagegen im konträren Fall vor, daß sich die behauptete Wahrheit der Komplexaussage A mit *einer bestimmten* vorausgesetzten Kombination der Wahrheitswerte ihrer atomaren Aussagen nicht widerspruchsfrei vereinbaren läßt. Unter der betrachteten Wahrheitswertkombination muß die Komplexaussage falsch sein. Mit dieser falschen Komplexaussage A korrespondiert im Netzmodell N_A genau eine Markierung aller Stellen, die den atomaren Aussagen aus der Komplexaussage entsprechen. Folglich lassen sich situative Inkonsistenzen auf der Ebene von markierungsabhängigen Konsistenzanalysen aufdecken. Es wird aber später gezeigt werden, daß durch spezielle Erweiterungen von Netzmodellen auch auf der markierungsunabhängigen Untersuchungsebene situative Inkonsistenzen in der logischen Problembeschreibung erkannt werden können.

Seitens der Netztheorie werden im wesentlichen zwei unterschiedliche Konzepte für das Konsistenz-Monitoring von Netzmodellen angeboten. Einerseits handelt es sich um die Analyse von Netzinvarianten. Hierbei bleiben aktuelle Netzmarkierungen unberücksichtigt. Die Invariantenanalyse gehört also zur ersten Ebene der markierungsunabhängigen Konsistenzuntersuchungen. Sie läßt sich für den Nachweis sowohl struktureller als auch situativer Inkonsistenzen benutzen. Andererseits können Faktetze studiert werden. Ihre Analyse setzt stets eine bestimmte Netzmarkierung voraus, bezüglich derer die Analyseergebnisse gelten. Sie zählt daher zur zweiten Ebene der markierungsabhängigen Konsistenzuntersuchungen. Sie erlaubt nur das Aufdecken situativer Inkonsistenzen.

4.2 Nachweis von Inkonsistenzen mit Hilfe der Invariantenanalyse

Die Konsistenz-Überwachung eines Netzmodells kann mit Hilfe der Invariantenanalyse in zwei Varianten erfolgen. Bei einer Konsistenzanalyse i.e.S. wird das Netzmodell N_A genau so betrachtet, wie es aus der logischen Problembeschreibung durch die Komplexaussage A hervorgegangen ist. Sie läßt nur zu, strukturelle Inkonsistenzen aufzudecken. Bei der Konsistenzanalyse i.w.S. wird das Netzmodell derart zu einem Model N_A^* erweitert, daß alle Literale aus der Komplexaussage A als atomare Klauseln repräsentiert werden. Dann ist es möglich, neben strukturellen Widersprüchen auch situative Inkonsistenzen zu erkennen. Zunächst wird vom ursprünglichen Netzmodell der Konsistenzanalyse i.e.S. ausgegangen.

4.2.1 Erkennen von strukturellen Inkonsistenzen

Von jeder aktuellen Netzmarkierung des Modells N_A wird abstrahiert. Stattdessen werden stets die Nullmarkierung, unter der alle Stellen des Netzmodells keine Marken tragen, und deren Reproduktionsmöglichkeit untersucht. (Vgl. zu weiteren, aber hier nicht wesentlichen Prämissen der Invariantenanalyse von Netzmodellen [20].) Es wird nur auf die Inzidenzmatrix C als kondensierter Abbildung der Netzstruktur (S, T, F, W) zurückgegriffen. Die Schaltregel SR für Netze legt die Folgemarkierung \underline{M}_f einer Startmarkierung \underline{M}_r durch $\underline{M}_f = \underline{M}_r + C \cdot \underline{t}_h$ fest, wenn die Folgemarkierung durch Ausführen einer Schaltfolge SF_h mit dem Schaltvektor \underline{t}_h erzeugt wird und diese Schaltfolge unter der Startmarkierung \underline{M}_r aktiviert ist. Jede T-Invariante \underline{t}_h erfüllt die Definitionsgleichung $C \cdot \underline{t}_h = \underline{0}$. Daher läßt sich jede semi-positive T-Invariante als Schaltvektor \underline{t}_h einer Schaltfolge SF_h interpretieren, welche die Nullmarkierung auf sich selbst abbildet:

$$(\underline{M}_f = \underline{M}_r + C \cdot \underline{t}_h \wedge \underline{M}_r = \underline{0} \wedge C \cdot \underline{t}_h = \underline{0} \wedge \underline{t}_h \geq \underline{0} \wedge \text{AKT}(SF_h, \underline{M}_r)) \\ \Rightarrow \underline{M}_r [SF_h > \underline{M}_f \wedge \underline{M}_f = \underline{M}_r + C \cdot \underline{t}_h = \underline{0} + \underline{0} = \underline{0}]$$

Auf dieser Basis hat LAUTENBACH sein Netztheorem formuliert und bewiesen ([8], S. 24 i.V.m. S. 19ff.). Unter den einschränkenden, hier aber erfüllten Voraussetzungen (Näheres dazu in [8] und [20]) besagt das Netztheorem, daß ein Netzmodell genau dann strukturell inkonsistent ist, wenn gilt:

- * Es existiert mindestens eine semi-positive T-Invariante \underline{t}_h als ganzzahlige Lösung des Gleichungssystems $C \cdot \underline{t}_h = \underline{0}$ (Existenzbedingung).
- * Mindestens eine der vorgenannten T-Invarianten \underline{t}_h läßt sich als der Schaltvektor einer Schaltfolge SF_h interpretieren, die unter der Nullmarkierung aktiviert ist (Aktivierungsbedingung).
- * Mindestens eine der vorgenannten T-Invarianten \underline{t}_h besitzt ein charakteristisches Subnetz SN_h , das keine nicht-triviale S-Invariante enthält (Subnetzbedingung).

Aufgrund der ersten beiden Bedingungen reproduziert die T-Invariante \underline{t}_h als Schaltfolge SF_h die Nullmarkierung gemäß $\underline{M}_r = \underline{0} [SF_h > \underline{0} = \underline{M}_f$. Die Existenz einer T-Invariante garantiert nur, daß ihre zugehörige Schaltfolge jede Start- in eine unveränderte Zielmarkierung überführt, falls die Schaltfolge unter der Startmarkierung aktiviert ist. Durch die Definitionsgleichung der T-Invariante wird nur die Wirkung der Schaltfolge erfaßt, ohne die notwendige Erfüllung der Aktivierungsbedingungen ihrer Transitionen zu gewährleisten. Daher stellt erst die Aktivierungsbedingung des Netztheorems sicher, daß die Schaltfolge einer T-Invariante unter der Nullmarkierung tatsächlich aktiviert ist. Die Subnetzbedingung ist aus beweistechnischen Gründen erforderlich, um in Sonderfällen den fehlerhaften Ausweis von

Scheininkonsistenzen zu verhindern. (Beispiele für T-Invarianten, welche die Aktivierungs- oder Subnetzbedingung des Netztheorems verletzen, werden in [20] diskutiert.)

Zugleich impliziert das Netztheorem das Korollar: Ein Netzmodell repräsentiert eine strukturell konsistente logische Problembeschreibung durch die Komplexaussage A genau dann, wenn keine semi-positive T-Invariante existiert oder wenn alle vorhandenen semi-positiven T-Invarianten unter der Nullmarkierung nicht aktiviert sind oder wenn alle vorhandenen semi-positiven T-Invarianten jeweils mindestens eine nicht-triviale S-Invariante für ihre charakteristischen Subnetze besitzen.

Eine notwendige Bedingung für den Nachweis einer strukturellen Inkonsistenz ist die Existenz einer ganzzahligen, semi-positiven Lösung des linearen, ganzzahligen und homogenen Gleichungssystems $C \cdot \underline{t}_h = 0$. Hierin liegt der wesentliche Schritt zur Transformation der Konsistenzanalyse von Netzmodellen in ein linear-ganzzahliges arithmetisches Kalkül. Dabei erfolgt zwar keine vollständige Arithmetisierung, weil die Aktivierungs- und die Subnetzbedingung weiterhin als hinreichende Bedingungen für das Vorliegen einer Inkonsistenz überprüft werden müssen. Diese beiden Bedingungen lassen sich aber grundsätzlich auch arithmetisch ausdrücken ([20]). Daher läßt sich die Anwendung des Netztheorems vollständig auf das Lösen linear-ganzzahliger Gleichungssysteme reduzieren. Dies verdeutlicht das Potential der Netztheorie, eine kompakte und transparente graphische Repräsentation logischer Sachverhalte einerseits mit dem Einsatz leistungsfähiger arithmetischer Kalküle andererseits zu kombinieren.

Die logische Problembeschreibung durch die Komplexaussage A wird zunächst in die graphische Repräsentation ihres Netzmodells N_A transformiert. Dessen Konsistenzanalyse wird anschließend auf eine arithmetische Analyse der Lösungsmöglichkeit linear-ganzzahliger Gleichungssysteme zurückgeführt. Die zweifache Transformation der ursprünglichen logischen Problembeschreibung erfüllt die beiden eingangs aufgestellten Anforderungen an das Konsistenz-Monitoring. Die Ableitung eines Netzmodells aus einer Komplexaussage genügt dem konstruktiven Postulat. Das reiche mathematische Fundament der Petrinetz-Theorie wird dem analytischen Postulat gerecht. So liegt für die Invariantenanalyse eines Netzmodells eine breite Palette von Auswertungsalgorithmen vor, die sich mit Hilfe der Automatischen Informationsverarbeitung implementieren lassen. Dabei verdient die Arbeit von PASCOLETTI besondere Beachtung ([14]). Er präsentiert zwei subtile Methoden zur Untersuchung der T- und S-Invarianten von Stelle/Transition-Netzen, die es erstmals gestatten, die Menge der "einfachen" Invarianten vollständig zu ermitteln. Jede Invariante eines Netzmodells kann aus solchen einfachen Invarianten als deren Linearkombination erzeugt werden. Durch die schematische Untersuchung aller Linearkombinationen von einfachen Invarianten ist das Problem der vollständigen Invariantenaufdeckung im Prinzip gelöst. Folglich ist es theoretisch möglich, alle Inkonsistenzen eines Netzmodells mit Hilfe linear-ganzzahliger arithmetischer Algorithmen zu erkennen. Die Konsistenzanalyse von Netzmodellen besitzt also den Vorzug der Vollständigkeit.

Bisher wurde nur die Konsistenzanalyse betrachtet. Die Konsistenzdiagnose läßt sich aber unmittelbar anschließen. Ein weiterer Vorteil der netzbasierten Konsistenzanalyse liegt in ihrer Konstruktivität. Falls eine inkonsistente logische Problembeschreibung vorliegt, wird zugleich eine Ursache dieser Inkonsistenz als T-Invariante identifiziert, welche die drei Bedingungen des Netztheorems erfüllt. Hierzu wird auf die charakteristischen Subnetze SN_h der inkonsistenzverursachenden T-Invarianten \underline{t}_h zurückgegriffen. Jedes Subnetz SN_h enthält genau diejenigen Transitionen $t_i \in TU_h$, deren korrespondierenden Klauseln K_i in der Komplexaussage A niemals zugleich wahr sein können. Die simultane Wahrheit dieser Klauseln, die aufgrund der o.a. metasprachlichen Basisprämisse für die Konsistenz der logischen Problembeschreibung notwendig ist, läßt sich nicht

widerspruchsfrei herstellen. Daher zeichnet die Entdeckung einer Inkonsistenz durch Nachweis einer T-Invariante, die das Netztheorem erfüllt, zugleich diejenige Klauselmenge in der logischen Problembeschreibung durch die Komplexaussage A aus, die diese Inkonsistenz verursacht hat.

4.2.2 Erweiterung um situative Inkonsistenzen

Falls ein Netzmodell als strukturell konsistent nachgewiesen wurde, braucht es dennoch nicht in jedem Modellzustand konsistent zu sein. Denn strukturelle Konsistenz bedeutet nur Freiheit von logischen Kontradiktionen. Bei der Existenz solcher Kontradiktionen wäre ein Modell in *jedem beliebigen* Zustand in sich widersprüchlich, weil es *immer* eine falsche problembeschreibende Komplexaussage A repräsentierte. Stattdessen kann aber ein strukturell konsistentes Modell dennoch *einzelne* inkonsistente Modellzustände besitzen. Solche inkonsistenten Modellzustände entsprechen Problemsituationen, in denen die problembeschreibende Komplexaussage insgesamt falsch ist.

Erweiterte Netzmodelle ermöglichen die Behandlung sowohl struktureller als auch situativer Inkonsistenzen. Zur Verdeutlichung des zusätzlichen situativen Analyse- und Diagnosepotentials wird aber nachfolgend vorausgesetzt, daß das ursprüngliche Netzmodell N_A bereits als strukturell konsistent nachgewiesen oder zumindest in ein strukturell konsistentes Netzmodell überführt wurde. Dann wird dieses Basisnetzmodell für die Konsistenzanalyse i.w.S. um die Netzrepräsentationen spezieller atomarer Klauseln erweitert, die zwei Bedingungen erfüllen. Erstens müssen sie aus atomaren Aussagen oder deren Negaten bestehen, die in den zusammengesetzten Klauseln aus der Komplexaussage A bereits enthalten sind. Zweitens dürfen sie aber selbst noch keine atomaren Klauseln der Komplexaussage darstellen.

Es wird das Konjugat aus der ursprünglichen logischen Problembeschreibung durch die Komplexaussage A und den atomaren Klauseln gebildet, welche die beiden voranstehenden Bedingungen erfüllen. Das Netzmodell, das diese modifizierte Komplexaussage A^* repräsentiert, wird als erweitertes Netzmodell N_{A^*} bezeichnet. Da in Netzmodellen jede Klausel durch genau eine Transition mit ihren inzidenten Stellen repräsentiert wird, entspricht der Menge aller hinzugefügten Klauseln eine Ergänzungsmenge TE^* . Sie umfaßt alle Transitionen, die den ergänzten Klauseln im erweiterten Netzmodell N_{A^*} zugeordnet sind.

Ein erweitertes Netzmodell N_{A^*} ist immer inkonsistent, weil es per constructionem jede atomare Aussage A_j mit $K_1 \Leftrightarrow A_j$ und deren Negat mit $K_2 \Leftrightarrow \neg A_j$ als atomare, konjunktiv verknüpfte Klauseln umfaßt. Keine Wahrheitswertzuweisung zur atomaren Aussage A_j ist möglich, die beide atomaren Klauseln simultan wahr werden ließe. Folglich kann die Komplexaussage A als Konjugat aller Klauseln des erweiterten Netzmodells niemals wahr sein. Damit ist aber die metasprachliche Basisprämisse für konsistente Netzmodelle und widerspruchsfreie logische Problembeschreibungen verletzt. Da die Paare inkonsistenter atomarer Klauseln konstruktionsbedingt zu dem ursprünglichen Netzmodell hinzugefügt wurden, ohne eine Komponente aus der ursprünglichen logischen Problembeschreibungen zu repräsentieren, besitzt ihre Inkonsistenz allerdings keine Bedeutung für die Konsistenzanalyse des beschriebenen Problems. Daher werden die Inkonsistenzen, die aus solchen ergänzten, paarweise inkonsistenten atomaren Klauseln unmittelbar gebildet werden, fortan aus der Konsistenzanalyse i.w.S. als triviale Inkonsistenzen ausgeklammert.

Es interessieren nur diejenigen Inkonsistenzen, die im erweiterten Netzmodell N_{A^*} jeweils aus der Konjunktion ergänzter atomarer Klauseln mit Klauseln aus der ursprünglichen Komplexaussage A des Basisnetz-

modells N_A resultieren. Es läßt sich zeigen ([20], Abschnitt 4.2.2), daß jede T-Invariante t_h , die im erweiterten, aber unmarkierten Netzmodell N_A^* das Netztheorem erfüllt, eine äquivalente Inkonsistenzmenge IK_h aus inkonsistenzverursachenden Klauseln auszeichnet. Diese Inkonsistenzmenge liefert zugleich eine Klasse von Markierungen des ursprünglichen Netzmodells N_A und eine Klasse äquivalenter Wahrheitswertzuweisungen zu den atomaren Aussagen aus der Komplexaussage A. Beide Klassen drücken in äquivalenter Weise jeweils eine situative Inkonsistenz der logischen Problembeschreibung aus.

Die T-Invariante t_h besitzt die Unterstützungsmenge TU_h genau derjenigen Transitionen, die im charakteristischen Subnetz SN_h der T-Invariante t_h enthalten sind. Die Anzahl aller Transitionen $t_{i(p)}$, die mit $p=1, \dots, P_h$ zur Unterstützungsmenge TU_h gehören, wird mit $P_h \in \mathbb{N}_+$ bezeichnet. Jede Transition $t_{i(p)}$ aus der T-Invariante repräsentiert eine Klausel $K_{i(p)}$ aus der erweiterten problembeschreibenden Komplexaussage A^* . Da diese Klauseln in der Komplexaussage A^* konjunktiv verknüpft sind, repräsentiert die T-Invariante t_h insgesamt das Konjugat $A_h \Leftrightarrow K_{i(1)} \wedge \dots \wedge K_{i(P_h)}$. Die inkonsistenzverursachenden Klauseln sind mit denjenigen atomaren Klauseln $K_{i(p)}$ aus dem Konjugat A_h identisch, die beim Übergang vom strukturell konsistenten Basisnetzmodell N_A zum erweiterten Netzmodell N_A^* als Literale $L_{i,j}$ mit $L_{i,j} \Leftrightarrow K_{i(p)}$ ergänzt wurden. Dieser Netzerweiterung entspricht im Netzmodell N_A^* die Ergänzungsmenge TE^* derjenigen Transitionen t_i , die zusammen mit Ein- oder Ausgangsstellen s_j die ergänzten Literale $L_{i,j}$ repräsentieren. Somit ergibt sich die Menge aller Klauseln, welche die Inkonsistenz der T-Invariante t_h verursachen, als Schnittmenge der Unterstützungsmenge TU_h dieser T-Invariante mit der Ergänzungsmenge TE^* . Diese invariantenspezifische Inkonsistenzmenge IK_h ist also definiert durch:

$$IK_h = \{ K_{i(p)} : p=1, \dots, P_h \wedge P_h = \#(TU_h) \wedge t_{i(p)} \in (TU_h \cap TE^*) \}$$

Die Inkonsistenzmenge IK_h wird in äquivalente Markierungen des ursprünglichen Netzmodells N_A und Wahrheitswertzuweisungen zu der logischen Problembeschreibung durch die Komplexaussage A transformiert. Hierbei wird auf den Sachverhalt zurückgegriffen, daß alle atomaren Klauseln aus der Menge IK_h wahr sein müßten, damit die nachgewiesene Inkonsistenz im Netzmodell N_A^* vorliegen kann. Wenn die atomare Klausel $K_{i(p)}$ aus der Inkonsistenzmenge IK_h als Literal $L_{i,j} \Leftrightarrow A_j$ vorliegt, wird die Wahrheit dieses Literals als Markierung $M_r(s_j)=1$ der Stelle s_j dargestellt, welche die atomare Aussage A_j repräsentiert. Der atomaren Aussage A_j ist dann der Wahrheitswert "wahr" zugewiesen. Falls die atomare Klausel $K_{i(p)}$ jedoch ein Literal $L_{i,j} \Leftrightarrow \neg A_j$ darstellt, wird seine Wahrheit im Netzmodell N_A dadurch abgebildet, daß die Stelle s_j der atomaren Aussage A_j mit $M_r(s_j)=0$ unmarkiert bleibt. Dann wird die atomare Aussage A_j als falsch und deren Negat $\neg A_j$ als wahr interpretiert.

Die Stellen s_j , die wegen $L_{i,j} \Leftrightarrow A_j$ oder $L_{i,j} \Leftrightarrow \neg A_j$ eine der beiden vorgenannten Bedingungen erfüllen, werden als Inkonsistenzstellen der T-Invariante t_h bezeichnet. Denn die invariantenspezifische Markierung dieser Stellen repräsentiert die Wahrheit der inkonsistenzverursachenden atomaren Klauseln $K_{i(p)}$ aus der Inkonsistenzmenge IK_h . Für alle übrigen Stellen des Netzmodells N_A ist die Markierung beliebig. Entsprechend können den jeweils repräsentierten atomaren Aussagen beliebige Wahrheitswerte zugeordnet werden. Aus diesen beiden Freiheitsgraden resultieren im allgemeinen mehrelementige Klassen situativ-inkonsistenter Netzmarkierungen bzw. Wahrheitswertzuweisungen für dieselbe inkonsistenzverursachende Klauselmeng.

Die Inkonsistenzdiagnose im erweiterten Netzmodell verläuft analog zur Diagnose im Basisnetzmodell. Die Inkonsistenzursachen sind die bereits erkannten invariantenspezifischen Inkonsistenzmengen IK_h .

4.3 Nachweis von Inkonsistenzen durch Faktnetzanalysen

Eine besondere Form der situativen Inkonsistenz stellen Verletzungen von Integritätsbedingungen dar. Sie können mit der voranstehend erläuterten Invariantenanalyse von Netzmodellen und den Erkenntnissen aus dem Netztheorem von LAUTENBACH grundsätzlich nicht erfaßt werden ([20]).

Ausgangspunkt ist jetzt - im Gegensatz zur früheren Invariantenanalyse - ein markiertes Netzmodell. Die Markierung ist die netztheoretische Beschreibungsform des jeweils aktuellen Modellzustands und der hiermit korrespondierenden Problemsituation. Untersucht wird, ob die modellierte Problemsituation alle Integritätsbedingungen erfüllt. Jede Stelle s_j entspricht aufgrund der früher dargelegten Netzkonstruktion einer atomaren Aussage A_j aus der Komplexaussage A , welche die logische Problembeschreibung vollständig ausdrückt. Die atomare Aussage A_j ist genau dann wahr (falsch), wenn die Stelle s_j markiert (unmarkiert) ist. Folglich läßt sich aus der markierungsbedingten Verteilung von Marken über den Stellen des Netzmodells unmittelbar ablesen, welche atomaren Aussagen im aktuellen Modellzustand wahr und welche falsch sind. Aus logischer Perspektive ist die aktuelle Problemsituation durch die Wahrheitswerte aller atomaren Aussagen in der Komplexaussage A vollständig und eindeutig bestimmt. Daher wird die aktuelle Problemsituation durch die Netzmarkierung repräsentiert.

Eine situative Inkonsistenz liegt als Verletzung einer Integritätsbedingung genau dann vor, wenn unter der situationsabbildenden Netzmarkierung diejenige Transition, welche die Integritätsbedingung repräsentiert, aktiviert ist. Denn diese Aktivierung verletzt das grundsätzliche Aktivierungsverbot für alle Fakten. Da Integritätsbedingungen als Fakten modelliert werden, bedeutet dies zugleich die Verletzung der repräsentierten Integritätsbedingung. Aufgrund der früher definierten Aktivierungsbedingung für Transitionen und infolge des Ausschlusses von 1-Schleifen für Netzrepräsentationen logischer Sachverhalte läßt sich die Verletzung einer Integritätsbedingung unmittelbar als Erfüllung eines Gleichungssystems definieren. Eine Integritätsbedingung, die durch die faktische Transition t_i repräsentiert, ist genau dann verletzt, wenn für die aktuelle Netzmarkierung M_r gilt:

$$(\bigwedge (s_j \in V(t_i)) : M_r(s_j) = 1) \quad \wedge \quad (\bigwedge (s_j \in N(t_i)) : M_r(s_j) = 0)$$

Mit der Aufdeckung aller Fakten, die unter einer Markierung aktiviert sind, ist die Konsistenzanalyse durch Nachweis aller situativen Integritätsverletzungen abgeschlossen.

Die Inkonsistenzdiagnose bereitet keine Schwierigkeiten. Aus der o.a. Definition der Aktivierungsbedingung $AKT(t_i, M_r)$ kann unmittelbar abgelesen werden, welche markierten Eingangsstellen und welche unmarkierten Ausgangsstellen die Aktivierung eines Fakts t_i unter einer Markierung M_r verursacht haben. Da diese Stellen s_j mit atomaren Aussagen A_j aus der logischen Problembeschreibung korrespondieren, ist hiermit zugleich aufgedeckt, welche wahren bzw. falschen atomaren Aussagen die Inkonsistenz der aktuellen Problemsituation verursacht haben.

Aus dieser Kenntnis können im Rahmen einer Inkonsistenztherapie Schlüsse darüber gezogen werden, wie sich die Integritätsverletzung zukünftig vermeiden läßt. Hierfür stehen grundsätzlich zwei Wege offen. Erstens können die verletzte Integritätsbedingung selbst oder die übrige logische Problembeschreibung so modifiziert werden, daß unter der betrachteten Netzmarkierung das Fakt, das die Integritätsbedingung repräsentiert, nicht mehr aktiviert ist. Zweitens läßt sich auch die logische Problembeschreibung und deren Netzmodell so abändern, daß die integri-

tätsverletzende Markierung von der Ausgangsmarkierung aus überhaupt nicht mehr erreicht werden kann. In beiden Fällen muß allerdings geprüft werden, ob die Veränderungen an der logischen Problembeschreibung und ihrer Netzrepräsentation noch dem modellierten Realproblem gerecht werden. In welcher Weise solche Therapieversuche konkret abgewickelt werden, liegt aber außerhalb des Erkenntnisinteresses dieser Ausarbeitung.

Die Konsistenzanalyse von Faktnetzen ist nicht auf die Überprüfung von Integritätsverletzungen beschränkt. Sie läßt auch zu, situative Inkonsistenzen in einem Netzmodell ohne besondere Integritätsbedingungen aufzudecken. Dabei wird von nicht erweiterten Modellen N_A ausgegangen, welche die logischen Problembeschreibungen durch Komplexaussagen A ohne zusätzliche atomare Klauseln repräsentieren. Anknüpfungspunkt dieser Variante der Faktnetzanalyse ist die früher dargelegte metasprachliche Basisprämisse, daß die logische Problembeschreibung durch eine Komplexaussage A in konjunktiver Normalform für jede konsistente Modellierung wahr sein muß. Hieraus wurde die Wahrheit aller Klauseln K_i gefolgert, die zu dieser Komplexaussage gehören und im Netzmodell N_A als Transitionen t_i repräsentiert werden. Dieser Konsistenzanforderung würde bereits die Falschheit nur einer Klausel K_i widersprechen.

Aus der Definition einer Klausel als Adjugat von Literalen folgt, daß eine Klausel K_i genau dann falsch ist, wenn alle ihre Literale falsch sind. Aufgrund des Konstruktionsschemas für Netzmodelle tritt dieser Fall genau dann ein, wenn alle Eingangsstellen der Transition t_i , welche die Klausel K_i repräsentiert, unter einer Markierung \underline{M}_r markiert und wenn alle Ausgangsstellen dieser Transition unter derselben Markierung unmarkiert sind. Unter genau dieser Markierung ist die Transition t_i aktiviert. Folglich liegt eine situative Inkonsistenz vor, die der Basisprämisse für jede Problembeschreibung widerspricht, wenn unter der situationsabbildenden Markierung mindestens eine Transition t_i aktiviert ist, die eine Klausel K_i aus der Komplexaussage A repräsentiert. Fakten stellen Transitionen dar, die unter keiner Markierung aktiviert sein dürfen. Daher entspricht eine situative Inkonsistenz durch eine Markierung, unter der mindestens eine Transition aktiviert ist, genau der Verletzung des Aktivierungsverbots für Fakten. Aufgrund dieses Zusammenhangs können situative Inkonsistenzen auch dadurch aufgedeckt werden, daß alle Transitionen eines Netzmodells N_A als Fakten betrachtet werden. Sobald für eine Markierung die Verletzung des Aktivierungsverbots für mindestens ein solches Fakt erkannt wird, repräsentiert die Markierung eine inkonsistente Problemsituation.

Diese Faktnetzanalyse für das Aufdecken situativer¹ Inkonsistenzen läßt sich auf die strukturelle Konsistenzanalyse eines Netzmodells ausweiten. Denn aus den voranstehenden Überlegungen folgt unmittelbar: Die Komplexaussage A einer logischen Problembeschreibung ist in allen Problemsituationen genau dann wahr, wenn die Transitionen des repräsentierenden Netzmodells N_A unter allen erreichbaren Markierungen tot sind und somit Fakten darstellen. Genau dann ist das Netzmodell strukturell konsistent.

Die Überprüfung, ob das Aktivierungsverbot für Fakten in einem Netzmodell verletzt ist, bereitet aufgrund des o.a. Gleichungssystems keine Schwierigkeiten. Daher scheint es prima facie angeraten, die Faktnetzanalyse dem mathematisch aufwendigeren Kalkül der Invariantenanalyse vorzuziehen. Dieses Urteil läßt sich jedoch bei genauerer Betrachtung nicht aufrechterhalten. Denn es wird übersehen, daß die Faktnetzanalyse stets Netzmarkierungen voraussetzt. Die Invariantenanalyse erfolgt dagegen - im früher erläuterten Sinne der Reproduktion von Nullmarkierungen - unabhängig von aktuellen Netzmarkierungen. Daher muß bei der Faktnetzanalyse der zusätzliche Aufwand für die Konstruktion erreichbarer Markierungen in Rechnung gestellt werden.

Der Bestimmungsaufwand für erreichbare Markierungen explodiert mit der Netzgröße. Die Aufgabe, die Erreichbarkeit von Markierungen in Netzen festzustellen, gehört zu einem der komplexesten kombinatorischen Probleme.

me. Seine Komplexität liegt z.B. noch über der von NP-vollständigen Problemen ([19], S. 125ff.), die - wie z.B. das traveling salesman-Problem - bereits zu den "schwierigsten" Problemen gerechnet werden. Daher scheidet die voranstehend skizzierte Faktnetzanalyse für die strukturelle Konsistenzanalyse als allgemeines Konzept aus. Im worst case-Fall läßt sich die Komplexität der Untersuchung *aller* erreichbaren Netzmarkierungen mit den heute verfügbaren Instrumenten nicht effizient beherrschen.

Dies bedeutet allerdings nicht, daß die zweite Version der Faktnetzanalyse generell irrelevant wäre. Vielmehr bietet sie einen übersichtlichen Ansatz, *einzelne* vorgegebene Netzmarkierungen hinsichtlich situativer Inkonsistenzen zu untersuchen. Allerdings besteht auch dann noch ein Nachteil gegenüber der Invariantenanalyse. Denn mit der Faktnetzanalyse lassen sich nur solche einfachen situativen Inkonsistenzen unmittelbar aufdecken, die aus der Verletzung des Aktivierungsverbots für ein einzelnes Fakt resultieren.

Schwierigkeiten bereitet dagegen komplexere Inkonsistenzen. Sie liegen vor, wenn die Aktivierungsbedingungen mehrerer Transitionen über die Markierungen gemeinsamer Ein- oder Ausgangsstellen so miteinander gekoppelt sind, daß die simultane Einhaltung des Aktivierungsverbots für alle gekoppelten Fakten für bestimmte Markierungsklassen unmöglich ist. Für das Erkennen solcher komplexer situativer Inkonsistenzen bietet das Konzept der Faktnetze kein allgemeingültiges Schema. Stattdessen muß auf die Intuition qualitativer Überlegungen zurückgegriffen werden, um die Kopplungsverhältnisse und die hiervon bedingten Inkonsistenzen zu durchschauen. Ein Beispiel dafür wird später vorgelegt. Die Invariantenanalyse kann dagegen immer nach demselben Schema abgewickelt werden, das die drei Bedingungen des Netztheorems überprüft. Dieses Schema ist unabhängig davon, ob einfache oder komplexe Inkonsistenzen im vorgenannten Sinne vorliegen.

Literatur

- [1] FIDELAK,M.: Petri-Netze - Eine formale Sprache zur Wissensrepräsentation, in: Rundbrief des Fachausschusses 1.2 Künstliche Intelligenz & Mustererkennung in der Gesellschaft für Informatik, Nr. 43 (1986), S. 32-38.
- [2] FIDELAK,M.: Petri Nets for Logical Representation, in: Chorafas,D.N. u. A.J. Rowe (Hrsg.): Proceedings of the 1st International Symposium on Artificial Intelligence and Expert Systems, 18.-22.05.1987 in Berlin, o.O. o.J. (1987), Part A, S. 95-116.
- [3] GABRIEL,R.: Optimierungsmodelle bei logischen Verknüpfungen - Modell-aufbau und Modellösung von Mixed-Integer-Problemen bei qualitativen Anforderungen, München 1982.
- [4] GENRICH,H.J. u. K. LAUTENBACH: System Modelling With High-Level Petri Nets, in: Theoretical Computer Science, Vol. 13 (1981), S. 109-136.
- [5] GIORDANA,A. u. L. SAITTA: Modeling Production Rules by Means of Predicate Transition Networks, in: Information Sciences, Vol. 35 (1985), S. 1-41.
- [6] JANTZEN,M. u. R. VALK: Formal Properties of Place/ Transition Nets, in: Brauer,W. (Hrsg.): Net Theory and Applications, Proceedings of the Advanced Course on General Net Theory of Processes and Systems, 8.-19. 10.1979 in Hamburg, Lecture Notes in Computer Science 84, Berlin - Heidelberg - New York 1980, S. 165-212.

- [7] JOHANNITGEN-HOLTHOFF,M.: Entscheidungsmodell der Jahresabschlußgestaltung für Publikumsaktiengesellschaften, Dissertation, Universität Köln 1985, Witterschlick/Bonn 1986.
- [8] LAUTENBACH,K.: On Logical and Linear Dependencies, Arbeitspapiere der GMD (Gesellschaft für Mathematik und Datenverarbeitung mbH/Bonn) Nr. 147, Sankt Augustin 1985.
- [9] LAUTENBACH,K.: Linear Algebraic Techniques for Place/Transition Nets, in: Brauer,W., Reisig,W. u. G. Rozenberg (Hrsg.): Petri Nets: Central Models and Their Properties, Advances in Petri Nets, Part I, Proceedings of an Advanced Course, 8.-19.09.1986 in Bad Honnef, Lecture Notes in Computer Science 254, Berlin - Heidelberg - New York - Tokyo 1987, S. 142-167.
- [10] LIU,N.K. u. T. DILLON: Detection of consistency and completeness in expert systems using Numerical Petri Nets, in: Gero,J.S. u. R. Stanton (Hrsg.): Artificial Intelligence Developments and Applications, Edited Selection of Papers to the Australian Joint Artificial Intelligence Conference, 02.-04.11.1987 in Sydney, Amsterdam - New York - Oxford - Tokyo 1987, S. 119-134.
- [11] MURATA,T. u. K. MATSUYAMA: Inconsistency Check of a Set of Classes using Petri Net Reductions, in: Journal of the Franklin Institute, Vol. 325 (1988), No. 1, S. 73-93.
- [12] NEUMANN,K.: Operations-Research-Expertensysteme - Wissenstransfer für die klein- und mittelständische Industrie, in: Henn,R. (Hrsg.): Technologie, Wachstum und Beschäftigung - Festschrift für Lothar Späth, Berlin - Heidelberg - New York - London - Paris - Tokyo 1987, S. 264-273.
- [13] OBERWEIS,A.: Checking Database Integrity Constraints while Simulating Information System Behaviour, in: o.V.: Application and Theory of Petri Nets, 9th European Workshop, 22.-24.06.1988 in Venedig, o.O. 1988, Vol. I, S. 299-308.
- [14] PASCOLETTI,K.-H.: Diophantische Systeme und Lösungsmethoden zur Bestimmung aller Invarianten in Petri-Netzen, Dissertation, Universität Bonn, Bonn 1985.
- [15] REISIG,W.: Petrinetze - Eine Einführung, 2. Aufl., Berlin - Heidelberg - New York - Tokyo 1986.
- [16] REISIG,W.: Place/Transition Systems - Fundamentals, in: Brauer,W., Reisig,W. u. G. Rozenberg (Hrsg.): Petri Nets: Central Models and Their Properties, Advances in Petri Nets, Part I, Proceedings of an Advanced Course, 8.-19.09.1986 in Bad Honnef, Lecture Notes in Computer Science 254, Berlin - Heidelberg - New York - Tokyo 1987, S. 116-141.
- [17] THORNTON,P.: Expert Systems - The Challenge for OR, in: Ohse,D., A.C. Esprester, H.-U. Küpper, P. Stähly u. H. Steckhan (Hrsg.): Operations Research Proceedings 1984, DGOR - Vorträge der 13. Jahrestagung, 12.-14.09.1984 in Sankt Gallen, Berlin - Heidelberg - New York - Tokyo 1985, S. 277-284.
- [18] WILLIAMS,H.P.: Model Building in Mathematical Programming, 2. Aufl., Chichester - New York - Brisbane - Toronto - Singapore 1985.
- [19] ZELEWSKI,S.: Komplexitätstheorie - als Instrument zur Klassifizierung und Beurteilung von Problemen des Operations Research, Braunschweig - Wiesbaden 1989.
- [20] ZELEWSKI,S.: Petrinetze für die Konstruktion und Konsistenzanalyse von logisch orientierten Problembeschreibungen, Arbeitsbericht Nr. 28, Industrieseminar, Universität Köln, Köln 1989.

Konsistenz-Monitoring für OR-Programme und Wissensbasen mit Hilfe von Petrinetzen, Teil II: Anwendungen*

Stephan Zelewski**

Stichworte: Expertensysteme, Konsistenz, logische Modellierung, Netztheorie, Operations Research, Petrinetze, Wissensbasen

Zusammenfassung: Auf der Basis von Petrinetzen wurde im ersten Teil ein Modellierungskonzept für Probleme vorgestellt, deren Struktur wesentlich von logischen Sachverhalten geprägt wird. Es diente speziell der natürlichen Repräsentation aussagenlogischer Zusammenhänge und der Überwachung ihrer Konsistenz. Der hier vorgelegte zweite Teil verdeutlicht nun Anwendungsmöglichkeiten der Netztheorie für Aufgaben des Konsistenz-Monitoring anhand eines Beispiels aus dem Gebiet der Jahresabschlußgestaltung von Aktiengesellschaften. Ein Ausblick widmet sich dem Einsatz von Netzmodellen für die Konsistenzüberwachung von Expertensystemen.

Consistency-monitoring for OR-programs and knowledge bases supported by Petri nets, part II: applications

Key-words: consistency, expert systems, knowledge bases, logic modelling, net theory, operations research, Petri nets

Abstract: In the first part of this contribution a modelling concept based on Petri nets was discussed for problems whose structures are essentially determined by logical aspects. The net approach supported the natural representation of problem descriptions expressed by propositional logic and the monitoring of its consistency. Now the second part illustrates possible applications of net theory for consistency monitoring. An example concerns the design of annual balance sheets of stock corporations with regard to corporate income tax. An outlook examines the use of net models for monitoring the consistency of expert systems.

* Weiterführende Darlegungen und ausführlichere Erläuterungen enthält der Arbeitsbericht Nr. 28 des Kölner Industrieseminars: "Petrinetze für die Konstruktion und Konsistenzanalyse von logisch orientierten Problembeschreibungen". Die nachfolgenden Quellenangaben beziehen sich auf das Literaturverzeichnis im Teil I des gleichen Beitrags.

** Dr. Stephan Zelewski, Universität Köln, Industrieseminar, Albertus-Magnus-Platz, D-5000 Köln 41.

5 Ein Beispiel aus dem Bereich der Jahresabschlußgestaltung

Das Leistungspotential von Netzmodellen für die kompakte Repräsentation umfangreicher logischer Problembeschreibungen wird an einem Beispiel der Jahresabschlußgestaltung von Publikumsaktiengesellschaften verdeutlicht. Es wurde bereits in einer ausführlicheren Variante von JOHANNITGEN-HOLTHOFF modelliert, allerdings mit der Hilfe von Binärvariablen als ein lineares, gemischt-ganzzahliges OR-Programm (vgl. [7], S. 205ff.). Das Entscheidungsmodell erstreckt sich auf die Gestaltung der Bemessungsgrundlage der Körperschaftsteuer unter Berücksichtigung von Verlustvor- und -rückträgen nach § 8 Abs. 4 KStG und Abschn. 37 Abs. 2 KStR i.V.m. § 10d EStG.

Da das Entscheidungsmodell äußerst komplex ausfällt, wird es hier nur in demjenigen Ausschnitt reflektiert, der sich auf eine nicht-negative Bemessungsgrundlage der Körperschaftsteuer vor Berücksichtigung eventuell vorgenommener Verlustvor- oder -rückträge bezieht. Hinsichtlich der ausführlicheren materiellen Interpretation der nachfolgend angeführten Variablen und Formeln wird auf die steuerrechtlichen Erläuterungen in [7], bezüglich der formalen Notation und Indexierung auf [20] verwiesen.

Grundlage des Netzmodells sind 16 atomare Aussagen A_j mit $j=1, \dots, 9, 11, \dots, 17$. Ihnen entspricht (" \Leftrightarrow ") jeweils ein Ungleichungssystem US_j . Es stellt die Korrespondenz zwischen der zugehörigen atomaren Aussage A_j aus der logischen Problembeschreibung und den Variablen eines - hier nicht näher explizierten - quantitativen OR-Programms (Rumpmodell) her. Für diese atomaren Komponenten der logischen Problembeschreibung gilt:

- A_1 : "Es liegt kein körperschaftsteuerrelevanter Verlust ($V_{t/-}$) vor." \Leftrightarrow $US_1 : V_{t/-} = 0$
- A_2 : "Der körperschaftsteuerrelevante Gewinn (G_t) ist gleich der Bemessungsgrundlage der Körperschaftsteuer vor der Berücksichtigung von Verlustvor- oder -rückträgen ($G_{t/0}$)." \Leftrightarrow $US_2 : G_t = G_{t/0}$
- A_3 : "Aus dem Vorvorjahr liegt kein Verlustrücktrag ($X_{t/-2}$) vor." \Leftrightarrow $US_3 : X_{t/-2} = 0$
- A_4 : "Aus dem Vorjahr liegt kein Verlustrücktrag ($X_{t/-1}$) vor." \Leftrightarrow $US_4 : X_{t/-1} = 0$
- A_5 : "Der Gewinn nach Abzug der kumulierten Verlustvorträge aus Vorjahren ($G_{t/B}$) ist gleich der Differenz aus dem (körperschaftsteuerrelevanten) Gewinn (G_t) und den (nicht-negativen) Verlustvorträgen der Vorjahre (Z_t)." \Leftrightarrow $US_5 : G_{t/B} = G_t - Z_t$
- A_6 : "Im Folgejahr wird kein Verlustvortrag ausgewiesen." \Leftrightarrow $US_6 : Z_{t+1} = 0$
- A_7 : "Anwendung des § 10d S. 1 EStG zur Berechnung der Bemessungsgrundlage der Körperschaftsteuer (E_t)." \Leftrightarrow $US_7 : E_t = G_{t/B} - X_{t+2/-2} - X_{t+1/-1}$
- A_8 : "Die Größe zur Begrenzung des Verlustrücktrags nach § 8 Abs. 4 KStG ($G_{t/E}$) beträgt Null." \Leftrightarrow $US_8 : G_{t/E} = 0$
- A_9 : "Die Größe zur Begrenzung des Verlustrücktrags nach § 8 Abs. 4 KStG ($G_{t/E}$) ist gleich der (nicht-negativen) Differenz aus dem Gewinn nach Abzug der kumulierten Verlustvorträge aus den Vorjahren ($G_{t/B}$) und der Bruttoausschüttung ($X_{a,t/b}$)." \Leftrightarrow $US_9 : G_{t/E} = G_{t/B} - X_{a,t/b}$
- A_{11} : "Die Bemessungsgrundlage der Körperschaftsteuer nach § 10d S. 1 EStG (E_t) beträgt Null." \Leftrightarrow $US_{11} : E_t = 0$
- A_{12} : "Es erfolgt für das Folgejahr keine Korrektur des kumulierten (und um den körperschaftsteuerrelevanten Gewinn gekürzten) Verlustvortrags aus den Vorjahren." \Leftrightarrow $US_{12} : Z_{t+1} = Z_t - G_t$
- A_{13} : "Für das Folgejahr wird der kumulierte (und um den körperschaftsteuerrelevanten Gewinn gekürzte) Verlustvortrag aus den Vorjahren um nicht mehr abzugsfähige Verlustvorträge korrigiert." \Leftrightarrow $US_{13} : Z_{t+1} = Z_t - G_t - (Z_{t-4} - G_t - G_{t-1} - G_{t-2} - G_{t-3} - G_{t-4})$

- A_{14} : "Die Bemessungsgrundlage der Körperschaftsteuer vor der Berücksichtigung von Verlust-
vor- oder -rückträgen ($G_{t/0}$) ist nicht-negativ." \Leftrightarrow $US_{14}: G_{t/0} \geq 0$
- A_{15} : "Der körperschaftsteuerrelevante Gewinn (G_t) ist mindestens so groß wie der (nicht-
negative) kumulierte Verlustvortrag (Z_t) der Vorjahre." \Leftrightarrow $US_{15}: G_t \geq Z_t$
- A_{16} : "Der Gewinn nach Abzug der kumulierten Verlustvorträge aus den Vorjahren ($G_{t/B}$)
reicht nicht aus, um die Bruttoausschüttung ($X_{a,t/B}$) zu decken."
 \Leftrightarrow $US_{16}: G_{t/B} < X_{a,t/B}$
- A_{17} : "Die Verlustvorträge des Jahres $t-4$ wurden bis zum Referenzjahr t ausgeglichen."
 \Leftrightarrow $US_{17}: Z_{t-4} \leq G_t + G_{t-1} + G_{t-2} + G_{t-3} + G_{t-4}$

Mit Hilfe dieser 16 atomaren Aussagen werden die logischen Restriktionen formuliert, die im Modell von JOHANNITGEN-HOLTHOFF von jeder steuerrechtlich zulässigen Bilanzgestaltung erfüllt werden müssen. Sie werden durch 8 zusammengesetzte, konjunktiv verknüpfte Aussagen A_j ($j=18, \dots, 25$) ausgedrückt. Ihre ursprüngliche Subjugatform, die der betriebswirtschaftlich vertrauten Gestalt von Entscheidungsregeln gleichkommt, wird hier in die konjunktive Normalform äquivalent transformiert. Hierdurch werden die Klauseln K_i mit $i=1, \dots, 13$ eingeführt. Das Konjugat dieser 13 Klauseln ist die gesuchte Komplexaussage A , die den gesamten logischen Zusammenhang der erfaßten steuerrechtlichen Modelldeterminanten ausdrückt.

$$A_{18} \Leftrightarrow (A_{14} \rightarrow (A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge A_4)) \Leftrightarrow (K_1 \wedge K_2 \wedge K_3 \wedge K_4)$$

$$\text{mit: } K_1 \Leftrightarrow \neg A_{14} \vee A_1 \quad K_2 \Leftrightarrow \neg A_{14} \vee A_2 \\ K_3 \Leftrightarrow \neg A_{14} \vee A_3 \quad K_4 \Leftrightarrow \neg A_{14} \vee A_4$$

$$A_{19} \Leftrightarrow (A_{15} \rightarrow (A_5 \wedge A_6)) \Leftrightarrow (K_5 \wedge K_6)$$

$$\text{mit: } K_5 \Leftrightarrow \neg A_{15} \vee A_5, \quad K_6 \Leftrightarrow \neg A_{15} \vee A_6$$

$$A_{20} \Leftrightarrow ((A_{14} \wedge A_{15}) \rightarrow A_7) \Leftrightarrow K_7$$

$$\text{mit: } K_7 \Leftrightarrow \neg A_{14} \vee \neg A_{15} \vee A_7$$

$$A_{21} \Leftrightarrow ((A_{14} \wedge A_{15} \wedge A_{16}) \rightarrow A_8) \Leftrightarrow K_8$$

$$\text{mit: } K_8 \Leftrightarrow \neg A_{14} \vee \neg A_{15} \vee \neg A_{16} \vee A_8$$

$$A_{22} \Leftrightarrow ((A_{14} \wedge A_{15} \wedge \neg A_{16}) \rightarrow A_9) \Leftrightarrow K_9$$

$$\text{mit: } K_9 \Leftrightarrow \neg A_{14} \vee \neg A_{15} \vee A_9 \vee A_{16}$$

$$A_{23} \Leftrightarrow ((A_{14} \wedge \neg A_{15}) \rightarrow (A_8 \wedge A_{11})) \Leftrightarrow (K_{10} \wedge K_{11})$$

$$\text{mit: } K_{10} \Leftrightarrow \neg A_{14} \vee A_8 \vee A_{15} \quad K_{11} \Leftrightarrow \neg A_{14} \vee A_{11} \vee A_{15}$$

$$A_{24} \Leftrightarrow ((A_{14} \wedge \neg A_{15} \wedge A_{17}) \rightarrow A_{12}) \Leftrightarrow K_{12}$$

$$\text{mit: } K_{12} \Leftrightarrow \neg A_{14} \vee \neg A_{17} \vee A_{12} \vee A_{15}$$

$$A_{25} \Leftrightarrow ((A_{14} \wedge \neg A_{15} \wedge \neg A_{17}) \rightarrow A_{13}) \Leftrightarrow K_{13}$$

$$\text{mit: } K_{13} \Leftrightarrow \neg A_{14} \vee A_{13} \vee A_{15} \vee A_{17}$$

Das Netzmodell N_A aus Abb. 2 repräsentiert die logische Problembeschreibung durch die Komplexaussage $A \Leftrightarrow K_1 \wedge \dots \wedge K_{13}$. Jede Stelle s_j vertritt eine atomare Aussage A_j mit $j=1, \dots, 9, 11, \dots, 17$; jede Transition t_i eine Klausel K_i mit $i=1, \dots, 13$. Das Netzmodell enthält keine T-Invariante, die das Netztheorem erfüllt. Deshalb ist die logische Problembeschreibung durch die Komplexaussage A strukturell konsistent.

Aber es existieren mehrere inkonsistente Problemsituationen, die durch spezielle Wahrheitswerte der atomaren Aussagen und korrespondierende Markierungen der Stellen im Netzmodell N_A definiert sind. Beispielsweise

sind alle Problemsituationen widersprüchlich, in denen die atomaren Aussagen A_{14} und A_{15} wahr, die atomaren Aussagen A_8 und A_9 dagegen falsch sind. Hierzu korrespondiert eine Klasse inkonsistenter Netzmarkierungen mit $M_r(s_{14})=M_r(s_{15})=1$ und $M_r(s_8)=M_r(s_9)=0$. Doch ist die situative Inkonsistenz dieser Wahrheitswertzuweisungen bzw. Netzmarkierungen keineswegs offensichtlich. Sie läßt sich aus den o.a. Definitionen der problembeschreibenden Aussagen A_j mit $j=18, \dots, 25$ nicht unmittelbar ablesen.

Inhaltlich bedeutet diese Inkonsistenz, daß es den steuerrechtlichen Vorgaben für die Bilanzgestaltung widersprechen würde, einen Abschluß vorzulegen, in dem folgende vier Aussagen gemeinsam (konjunktiv) gelten:

- Die Größe zur Begrenzung des Verlustrücktrags nach § 8 Abs. 4 KStG ist entweder positiv oder negativ: $G_{t/E} \neq 0$ ($\neg A_8$).
- Die Größe zur Begrenzung des Verlustrücktrags nach § 8 Abs. 4 KStG entspricht nicht der (nicht-negativen) Differenz aus dem Gewinn nach Abzug der kumulierten Verlustvorträge aus den Vorjahren und der Bruttoausschüttung: $G_{t/E} \neq G_{t/B} - X_{a,t/b}$ ($\neg A_9$).
- Die Bemessungsgrundlage der Körperschaftsteuer vor der Berücksichtigung von Verlustvor- oder -rückträgen ist nicht-negativ: $G_{t/0} \geq 0$ (A_{14}).
- Der körperschaftsteuerrelevante Gewinn ist mindestens so groß wie der (nicht-negative) kumulierte Verlustvortrag der Vorjahre: $G_t \geq Z_t$ (A_{15}).

Die vorgenannte situative Inkonsistenz läßt sich mit Hilfe der Auswertung von Faktnetzen mühelos aufdecken. Zu diesem Zweck werden alle Transitionen des Netzmodells N_A als Fakten interpretiert, die niemals schalten dürfen. Hinsichtlich dieses Postulats erweisen sich die Transitionen t_8 und t_9 sowie die Markierung der Stelle s_{16} als kritisch, sofern Markierungen mit $M_r(s_{14})=M_r(s_{15})=1$ und $M_r(s_8)=M_r(s_9)=0$ vorliegen. Denn die Stelle s_{16} kann nur entweder markiert oder aber unmarkiert sein. Im ersten Fall wäre die Transition t_8 aktiviert; ihre Schaltverbot als Fakt wäre verletzt. Im zweiten Fall wäre aber die Transition t_9 aktiviert, so daß auch deren Schaltverbot nicht eingehalten werden könnte. Da eine dritte Markierungsmöglichkeit für die Stelle s_{16} nicht existiert, gibt es keine konsistenten Markierungen des Netzmodells mit $M_r(s_{14})=M_r(s_{15})=1$ und $M_r(s_8)=M_r(s_9)=0$. Folglich sind alle Problemsituationen in sich widersprüchlich, welche die Wahrheit der atomaren Aussagen A_{14} und A_{15} sowie die Falschheit der atomaren Aussagen A_8 und A_9 involvieren. Entsprechende Problemlösungen scheiden als unzulässig aus.

Die gleiche Erkenntnis situativer Inkonsistenz läßt sich auch aus der Invariantenanalyse des erweiterten Netzmodells N_A^* gewinnen, das in Abb. 3 dargestellt wird. Es geht aus dem Basisnetzmodell N_A der Abb. 2 hervor, indem alle atomaren Aussagen A_j ($j=1, \dots, 9, 11, \dots, 17$) aus der Komplexaussage A sowie deren Negate als atomare Klauseln K_i mit $i=14, \dots, 45$ ergänzt werden. Diese Klauseln K_i werden im erweiterten Netzmodell N_A^* auf Transitionen t_i abgebildet und mit den Stellen s_j für die atomaren Aussagen A_j verknüpft. Die Transitionen t_i stellen Ein- oder Ausgangstransitionen der Stellen s_j dar je nachdem, ob sie atomare Klauseln $K_i \Leftrightarrow A_j$ bzw. $K_i \Leftrightarrow \neg A_j$ repräsentieren.

Abb. 4 zeigt die Inzidenzmatrix C dieses erweiterten Netzmodells. Aus ihr läßt sich - neben anderen - die T-Invariante t_h ableiten, die alle drei Bedingungen des Netztheorems erfüllt. Sie ist definiert durch:

$$t_h^{tr} = (C_{h,1} : C_{h,8} = C_{h,9} = C_{h,29} = C_{h,31} = 1 \wedge C_{h,38} = C_{h,40} = 2 \wedge \dots \\ C_{h,i} = 0 \text{ für alle } i \in (\{1, \dots, 45\} - \{8, 9, 29, 31, 38, 40\}))$$

Durch Ausführen der Schaltfolge $SF_h = \langle t_{38}, t_{40}, t_9, t_{31}, t_{38}, t_{40}, t_8, t_{29} \rangle$ mit dem Schaltvektor t_h wird im Netzmodell N_A^* die Nullmarkierung tatsächlich reproduziert. Dies läßt sich durch einen entsprechenden Markenfluß im Netz der Abb. 3 anschaulich nachvollziehen.

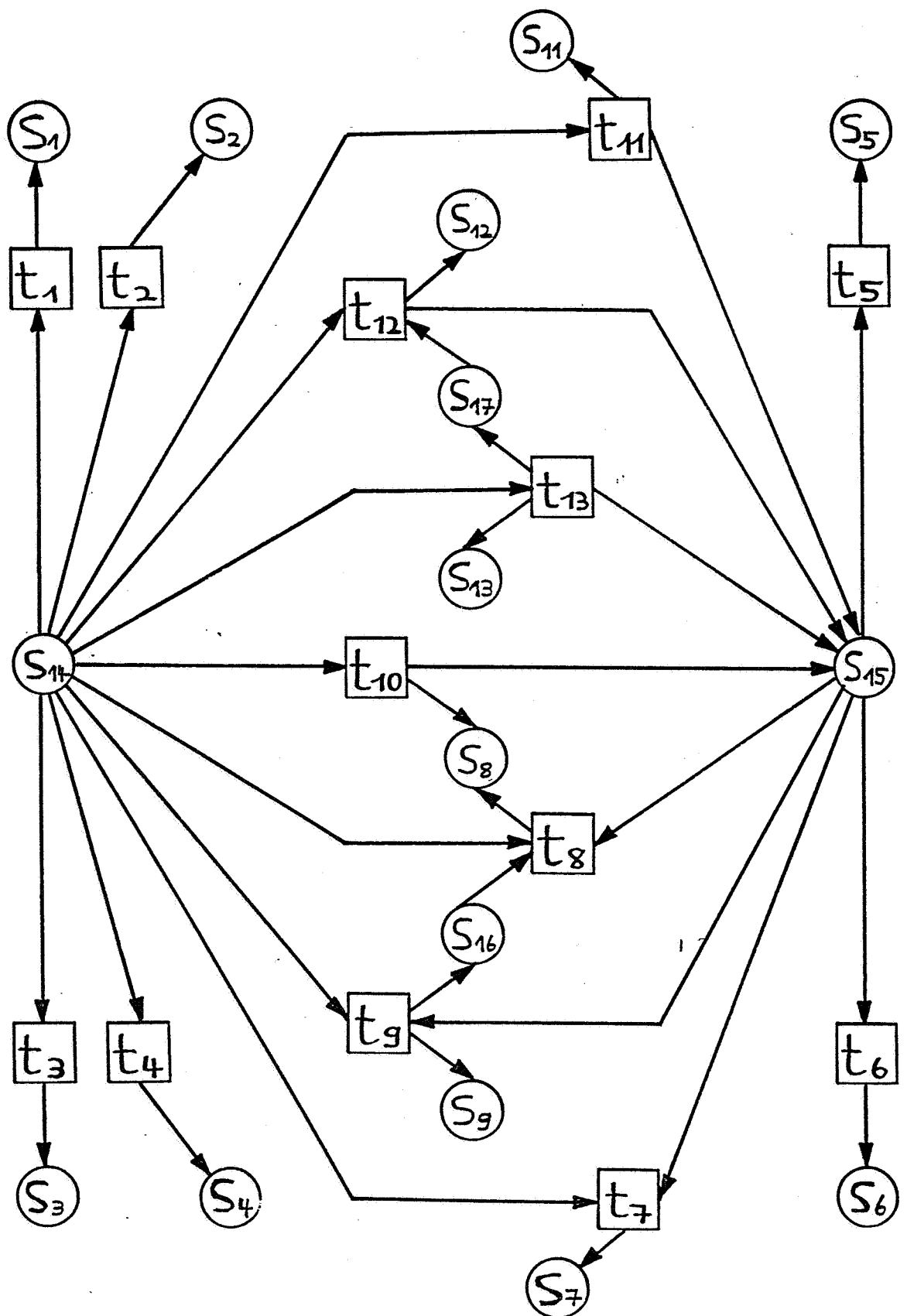


Abb. 2: Netzmodell N_A für die Komplexaussage A, die steuerrechtliche Restriktionen für die Bilanzgestaltung gemäß JOHÄNNTGEN-HOLTHOFF beschreibt

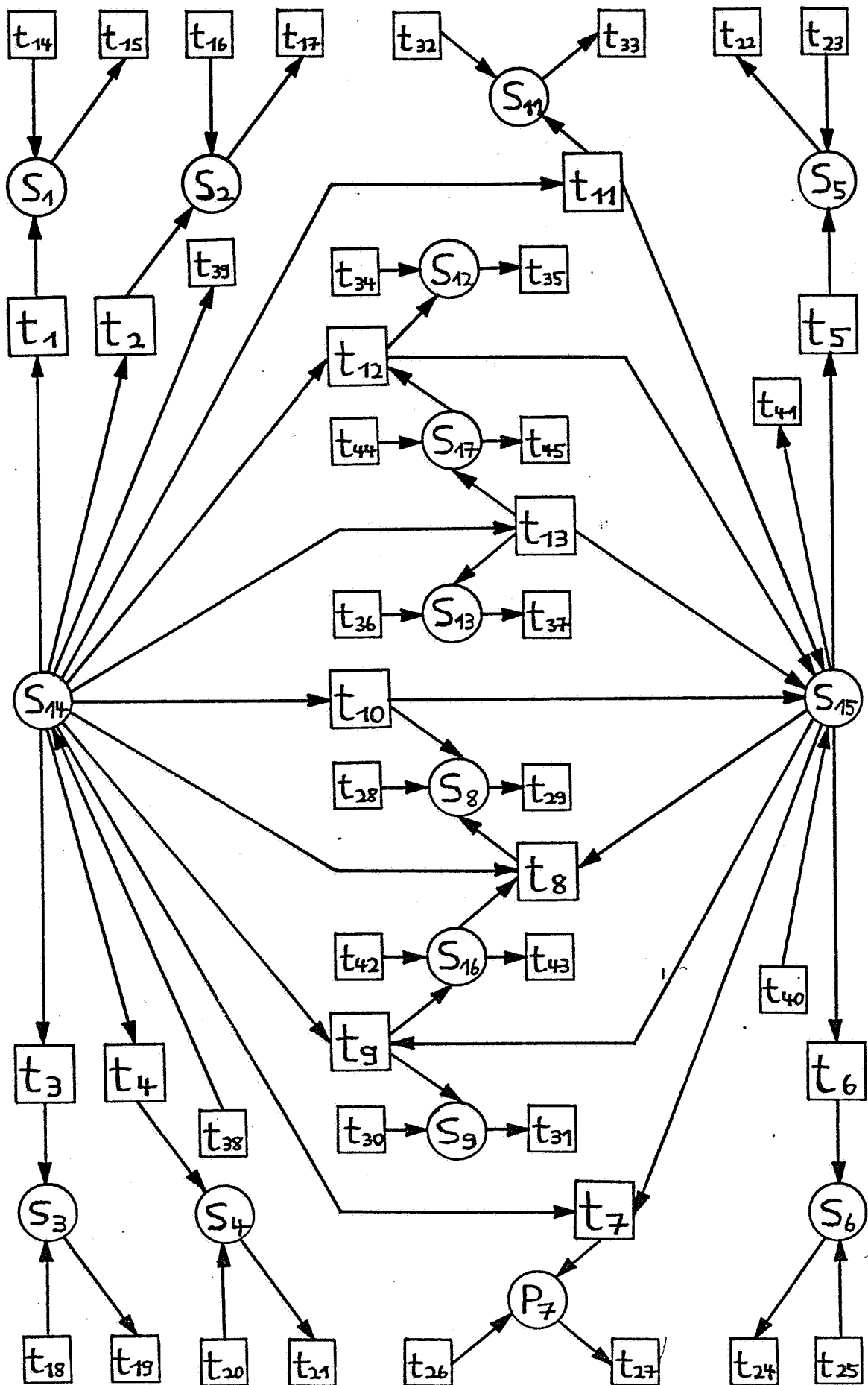


Abb. 3: Erweitertes Netzmodell N_A^* bezüglich für die Modellierung steuerrechtlicher Restriktionen durch das Netzmodell N_A aus Abb. 2

$\underline{C}^{tr} =$

1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	-1	-1	-1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	-1	-1	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	-1	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	-1	1	0	-1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	1	0	1
-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1

Abb. 4: Transponierte Inzidenzmatrix \underline{C} für das erweiterte Netzmodell N_A^* steuerrechtlicher Restriktionen aus Abb. 3

Ebenso kann für das charakteristische Subnetz SN_h der T-Invariante \underline{t}_h , das aus den Transitionen $t_9, t_8, t_{29}, t_{31}, t_{38}, t_{40}$ und den Stellen $s_8, s_9, s_{14}, s_{15}, s_{16}$ besteht, die Teilinzidenzmatrix C_h als Ausschnitt der Abb. 4 betrachtet werden. Hierbei zeigt sich, daß die stellenspezifischen Zeilenvektoren linear unabhängig sind, so daß keine nicht-triviale S-Invariante für dieses Subnetz existieren kann. Folglich ist auch das Vorliegen einer Scheininkonsistenz ausgeschlossen. Die gleichen Erkenntnisse lassen sich für weitere Schaltfolgen mit gleichem Schaltvektor \underline{t}_h , aber permutierter Reihenfolge der ausgeführten Schaltakte ableiten. Eine solche alternative Schaltfolge ist beispielsweise $SF_h' = \langle t_{40}, t_{38}, t_9, t_{40}, t_{38}, t_8, t_{29}, t_{31} \rangle$.

Ein Vergleich des erweiterten Netzmodells NA^* aus Abb. 3 mit dem entsprechenden Ausschnitt aus dem Entscheidungsmodell, das auf der Basis von Binärvariablen von JOHÄNNTGEN-HOLTHOFF in der Art eines OR-Programms entwickelt wurde ([7], S. 217ff.), verdeutlicht die relative Kompaktheit des Netzmodells NA^* . Zwar erfordert das Entscheidungsmodell nur $24+13=37$ Binärvariablen, während bei der Invariantenanalyse des Netzmodells für die Schaltanzahlen der Transitionen im Schaltvektor \underline{t}_h 45 Variablen berücksichtigt werden müssen. Doch treten an die Stelle von 68 Zeilen (Ungleichungen), die im Entscheidungsmodell von JOHÄNNTGEN-HOLTHOFF zur Repräsentation der Beziehungen zwischen den Logikvariablen erforderlich sind, bei der Invariantenanalyse des Netzmodells nur die 16 Zeilen des zu lösenden linear-ganzzahligen, homogenen Gleichungssystems $C \cdot \underline{t}_h = 0$.

Noch weit komprimierter fällt die Problemrepräsentation und Faktnetzanalyse durch das Basisnetzmodell NA aus Abb. 2 aus. Allerdings bedeutet diese Reduzierung des Modellierungsaufwands, daß die schematische und rein arithmetische Invariantenanalyse durch eine logische Fallunterscheidung bei der Netzmarkierung ersetzt werden muß. Diese Fallunterscheidung bereitet zwar keine Probleme, wenn der Umgang mit Petrinetzen vertraut ist. Doch läßt sie sich als qualitative Überlegung erheblich schwieriger mit Hilfe der Automatischen Informationsverarbeitung implementieren und gegenüber Modellbenutzern erklären, die über keine Kenntnisse der Petri-netz-Theorie verfügen, als die Invariantenanalyse.

Darüber hinaus erweist sich die graphische Darstellung der logischen Sachverhalte, die in den Netzmodellen der Abb. 2 u. 3 erfolgt, wesentlich übersichtlicher und transparenter als die entsprechende Repräsentation im Entscheidungsmodell, die sich über drei Seiten erstreckt. Dies verdeutlicht die besondere Eignung von Netzmodellen, die Kommunikation über logische Problemaspekte - wie die hier erörterte strukturelle Konsistenz der Problemabbildung und die eine exemplarisch beleuchtete situative Inkonsistenz - durch leicht verständliche graphische Modellierungen zu unterstützen. Auch die zuvor angesprochene Kompaktheit von Netzmodellen trägt zu diesen Vorzügen einer relativ hohen Intelligibilität und Kommunikabilität bei.

6 Ausblick: Konsistenz-Monitoring von Wissensbasen

6.1 Aussagenlogische Aspekte

Zunächst wird vorausgesetzt, daß Wissensbasen von Expertensystemen ausschließlich aus aussagenlogisch formulierten Produktionsregeln bestehen. Hinzu kommen "Fakten", die nichts mit faktischen Transitionen in Netzmodellen gemeinsam haben, sondern atomare Aussagen oder deren Negate darstellen. Auf solche Wissensbasen lassen sich die netztheoretisch fundierten Instrumente des Konsistenz-Monitoring anwenden, die im ersten Teil erläutert und oben exemplarisch verdeutlicht wurden. Dieser Aspekt wird jedoch nicht weiter vertieft. Denn die früheren Ausführungen brauchen lediglich aus dem Bereich des Operations Research in den der Künstlichen Intelligenz analog übertragen zu werden.

Stattdessen wird die Bedeutung von LAUTENBACHs Netztheorem für die KI-Forschung herausgestellt. Zentraler Ansatzpunkt hierbei ist, daß das Theorem eine tiefliegende Korrespondenz zwischen der logischen Beweismethode des Resolutionskonzepts einerseits und den ganzzahligen Lösungen linearer Gleichungssysteme andererseits aufdeckt. Das Resolutionskonzept ermöglicht es, die Wahrheit von logischen Formeln zu beweisen. Sein herausragendes Merkmal ist es, aufgrund seiner rein syntaktischen ("formalen") Vorgehensweise durch Automatische Informationsverarbeitungssysteme vollständig und - im Vergleich zu "klassischen" Deduktionskonzepten - relativ leicht implementiert werden zu können. Daher findet es seitens der KI-Forschung besondere Beachtung.

Ein Charakteristikum des Resolutionskonzepts liegt in seinem Refutationsprinzip. Aufgrund dieses Prinzips wird die Wahrheit einer Aussage nicht direkt bewiesen. Stattdessen wird versucht, die Inkonsistenz des kontradiktorischen Gegenteils der zu beweisenden Aussage aufzuzeigen. Dabei wird ein Rahmen von Axiomen unterstellt, die jeweils als wahr vorausgesetzt werden. Das fundamentale Resolutionstheorem besagt, daß eine Komplexaussage in konjunktiver Normalform *genau dann* eine immer falsche Aussage (Kontradiktion) darstellt, wenn sich aus ihr qua Resolution die Leerklausele ableiten läßt. Daher endet ein Resolutionsversuch erfolgreich, wenn es gelingt, aus dem Konjugat von Axiomen und zu beweisender, aber negierter Aussage die Leerklausele \emptyset abzuleiten. Im Falle einer erfolgreich abgeschlossenen Resolutionsprozedur ist es inkonsistent, zugleich die Wahrheit aller vorausgesetzten Axiome und die Wahrheit der zu beweisenden, aber negierten Aussage anzunehmen. Da das Axiomensystem als wahr vorausgesetzt wurde, kann die festgestellte Inkonsistenz nur aus der Annahme resultieren, das Negat der zu beweisenden Aussage sei wahr. Aus dem Prinzip des tertium non datur folgt, daß im Falle eines erfolgreichen Resolutionsversuchs mit dem wahr vorausgesetzten Axiomensystem nur die Wahrheit der zu beweisenden Aussage in ihrer ursprünglichen, nicht-negierten Form konsistent vereinbart werden kann. Falls es dagegen nicht gelingt, die Leerklausele abzuleiten, bleibt die Wahrheit der negierten Aussage im allgemeinen unbestimmt.

Einen interessanten Beitrag vermag LAUTENBACHs Netztheorem zur präzisen Ausformulierung des Resolutionskonzepts zu leisten. Denn die Aktivierungs- und Subnetzbedingungen des Netztheorems verweisen auf ein Formulierungsdefizit bei den meisten Beschreibungen von Resolutionsalgorithmen in Übersichtswerken der KI-Forschung. Die Formulierungslücke erstreckt sich auf die Behandlung von je zwei Klauseln, die *mehrere* Paare komplementärer Literale enthalten.

Zwei Literale werden als komplementär bezeichnet, wenn sie verschieden sind, aber dieselbe atomare Aussage A_j enthalten. Solche Paare komplementärer Literale liegen notwendig in der Gestalt $(L_{1,j}, L_{q,j}) \Leftrightarrow (A_j, \neg A_j)$ vor. Mit ihrer Hilfe wird die Basisoperation des Resolutionskonzepts definiert. Zwei Klauseln K_1 und K_q lassen sich durch diese Operation zu einer reduzierten Klausel $K_{1,q}$ - der Resolvente - zusammenfassen, falls eine atomare Aussage A_j in der einen Klausel K_1 als Literal $L_{1,j} \Leftrightarrow A_j$ und in der anderen Klausel als Literal $L_{q,j} \Leftrightarrow \neg A_j$ enthalten ist. Dann ist die Resolvente das Adjugat aller Literale aus den Klauseln K_1 und K_q bis auf die beiden komplementären Literale $L_{1,j}$ und $L_{q,j}$, die ersatzlos eliminiert werden.

Bei dieser Beschreibung der basalen Resolutionsoperation wird meistens implizit unterstellt, daß sich die beiden Klauseln vor ihrer Resolution nur genau ein Paar komplementärer Literale teilen. Dies ist auch der Standardfall aller exemplarischen Verdeutlichungen von Resolutionsalgorithmen. Es wird aber nicht explizit auf den Sonderfall eingegangen, daß zwei Klauseln mehrere Paare komplementärer Literale umfassen. Es bleibt offen, ob die Resolutionsoperation dann nicht angewendet werden darf oder ob sie - falls sie anwendbar bleibt - in spezieller Weise modifiziert werden

muß. Es wird hier nicht weiter auf die drei grundsätzlichen Optionen eingegangen, diese Explizierungslücke zu schließen (Näheres dazu in [20]). Stattdessen wird unmittelbar auf diejenige Präzisierung des aussagenlogischen Resolutionskonzepts eingegangen, die durch LAUTENBACHs Netztheorem nahegelegt wird. Es handelt sich um die Vorschrift, eine Resolventenbildung grundsätzlich auszuschließen, sobald zwei Klauseln mehrere Paare komplementärer Literale besitzen. Der Einfachheit halber werden nachfolgend nur solche Klauselpaare als Resolutionskandidaten behandelt, die ausschließlich aus Paaren komplementärer Literale bestehen.

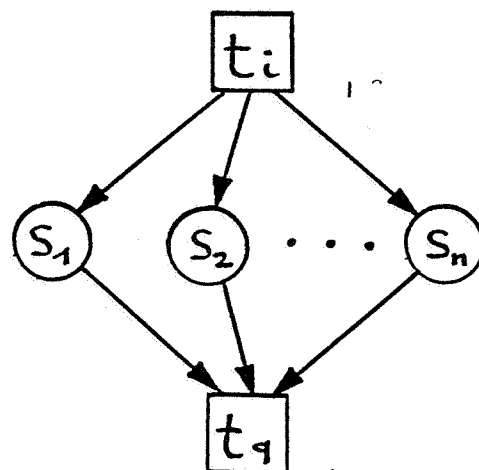
Die Menge aller Klauselpaare (K_1, K_q) , die mindestens zwei Paare $(L_{1,j}, L_{q,j})$ komplementärer Literale enthalten, kann in zwei Klassen zerlegt werden. Die erste Klasse umfaßt alle Klauselpaare, bei denen alle Literale $L_{1,j}$ mit $L_{1,j} \Leftrightarrow A_j$ zu der einen Klausel und alle Literale $L_{q,j}$ mit $L_{q,j} \Leftrightarrow \neg A_j$ zu der anderen Klausel gehören (homogene Klauselpaare). Die zweite Klasse erstreckt sich auf alle Klauselpaare, in denen jede Klausel mindestens ein Literal $L_{1/q,j}$ mit $L_{1/q,j} \Leftrightarrow A_j$ und mindestens ein Literal $L_{1/q,j}$ mit $L_{1/q,j} \Leftrightarrow \neg A_j$ besitzt (heterogene Klauselpaare). Beispielsweise bilden die Klauseln $K_1 \Leftrightarrow A_{1.1} \vee A_{1.2}$ und $K_q \Leftrightarrow \neg A_{q.1} \vee \neg A_{q.2}$ ein homogenes Klauselpaar, die Klauseln $K_1 \Leftrightarrow A_{1.1} \vee \neg A_{1.2}$ und $K_q \Leftrightarrow \neg A_{q.1} \vee A_{q.2}$ dagegen ein heterogenes Klauselpaar.

In Netzmodellen werden die vorgenannten Klauselpaare durch jeweils zwei Transitionen und inzidente Stellen für die atomaren Aussagen der komplementären Literalpaare repräsentiert. Dabei besitzen die Netzmodelle von homogenen Klauselpaaren eine Topologie mit eindeutig gerichtetem Markenfluß, wie in Abb. 5 verdeutlicht wird. Die Topologie von Netzmodellen für heterogene Klauselpaare zeichnet sich dagegen durch jeweils mindestens einen zirkularen Markenfluß aus, der in Abb. 6 angedeutet wird.

Mit der Resolventenbildung zweier Klauseln K_1 und K_q durch Eliminieren komplementärer Literalpaare ist eine spezielle Reduktionsoperation im Netzmodell des Klauselpaars (K_1, K_q) äquivalent. Hierbei werden die Transitionen t_1 und t_q , die mit den Klauseln K_1 bzw. K_q korrespondieren, miteinander identifiziert. Die resultierende eine neue Transition $t_{1,q}$ reprä-

$$\underline{C} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\underline{t}_h = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix}$$



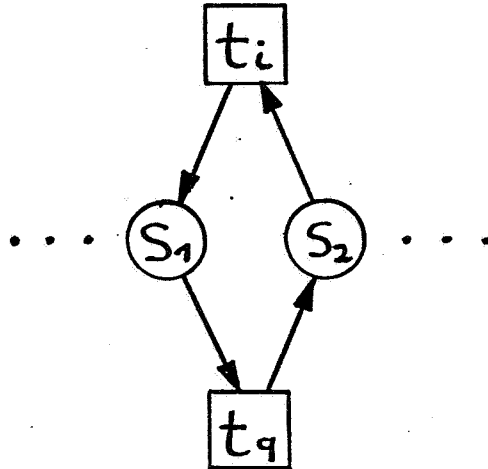
$$\underline{C} \cdot \underline{t}_h = \underline{0}, \text{ aber z.B.: } \underline{C}^{tr} \cdot \underline{s}_{h.1} = \underline{C}^{tr} \cdot \underline{s}_{h.2} = \underline{0}$$

$$\text{mit: } \underline{s}_{h.1}^{tr} = (+1, -1, 0, \dots, 0) \neq \underline{0}, \quad \underline{s}_{h.2}^{tr} = (-1, +1, 0, \dots, 0) \neq \underline{0}$$

Abb. 5: Netzmodell für ein homogenes Klauselpaar (K_1, K_q)
mit: $K_1 \Leftrightarrow A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_n$, $K_q \Leftrightarrow \neg A_1 \vee \neg A_2 \vee \dots \vee \neg A_n$

$$\underline{C} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\underline{t}_h = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix}$$



$\underline{C} \cdot \underline{t}_h = \underline{0}$, aber z.B.: $\underline{C}^{tr} \cdot \underline{s}_{h.1} = \underline{C}^{tr} \cdot \underline{s}_{h.2} = \underline{0}$
 mit: $\underline{s}_{h.1}^{tr} = (+1, +1) \neq \underline{0}$, $\underline{s}_{h.2}^{tr} = (-1, -1) \neq \underline{0}$,
 sowie für $\underline{M}_0^{tr} = (0, 0)$: $\neg \text{AKT}(t_i, \underline{M}_0)$ und $\neg \text{AKT}(t_q, \underline{M}_0)$

Abb. 6: Netzmodell für ein heterogenes Klauselpaar (K_i, K_q)
 mit: $K_i \Leftrightarrow \dots \vee A_1 \vee \neg A_2 \vee \dots$, $K_q \Leftrightarrow \dots \vee \neg A_1 \vee A_2 \vee \dots$

sentiert die Resolventen-Klausel $K_{i,q}$ für die beiden Klauseln K_i und K_q .
 Zugleich werden die Stellen s_j , welche die atomaren Aussagen A_j aus komplementären Literalpaaren repräsentieren (komplementäre Stellen), einschließlich ihrer adjazenten Kanten zu den Transitionen t_i und t_q getilgt. Das Ableiten der Leerklausel bei Resolutionsprozeduren bedeutet in Netzmodellen, die klauselrepräsentierenden Transitionen so lange miteinander zu identifizieren und hierbei komplementäre Stellen zu eliminieren, bis nur noch eine isolierte Transition als Repräsentation der Leerklausel übrig bleibt.

Die zentrale Bedeutung von LAUTENBACHS Netztheorem liegt darin, die Bedingungen festzulegen, unter denen die voranstehende Netzreduktion zulässig ist. Die Netzreduktion darf nur dann ausgeführt werden, wenn das (Teil-)Netz aus den beiden Transitionen t_i und t_q , die zusammen mit ihren inzidenten Stellen und adjazenten Kanten ein Klauselpaar (K_i, K_q) repräsentieren, der Existenz-, der Aktivierungs- und der Subnetzbedingung des Netztheorems gerecht werden.

Aufgrund der Äquivalenz zwischen Netzreduktion und aussagenlogischer Resolutionsoperation läßt sich aus der Zulässigkeit der ersten auf die Zulässigkeit der zweiten zurückschließen. Daher kann die oben aufgeworfene Frage, ob Klauselpaare mit mehreren komplementären Literalpaaren resolviert werden dürfen, dadurch beantwortet werden, daß überprüft wird, ob die Reduktion des korrespondierenden Netzmodells alle drei Bedingungen des Netztheorems erfüllt. Genau das ist aber nicht der Fall.

Bei homogenen Klauselpaaren besitzt das korrespondierende Netzmodell (Abb. 5) zwar eine semi-positive T-Invariante \underline{t}_h mit $\underline{t}_h^{tr} = (1, 1)$, die unter der Nullmarkierung aktiviert ist und diese Markierung als Schaltfolge $\langle t_i, t_q \rangle$ auch reproduziert. Doch wird die Subnetzbedingung verletzt. Das charakteristische Subnetz SN_h der T-Invariante \underline{t}_h fällt mit dem Netzmodell zusammen. Es besitzt für jedes Paar komplementärer Stellen mindestens zwei nicht-triviale S-Invarianten $\underline{s}_{h.1}$ und $\underline{s}_{h.2}$. Sie gewichten diese beiden Stellen jeweils mit dem Einheitsgewicht "1", allerdings mit entgegengesetzten Vorzeichen. Allen anderen Stellen kommt jeweils das Null-

gewicht zu. Beispielsweise werden die beiden Stellen s_1 und s_2 betrachtet, die zwei atomare Aussagen A_1 bzw. A_2 repräsentieren. Beide Aussagen gehören jeweils zu einem komplementären Literalpaar $(A_1, \neg A_1)$ bzw. $(A_2, \neg A_2)$ in den Klauseln $K_1 \Leftrightarrow A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_n$ und $K_q \Leftrightarrow \neg A_1 \vee \neg A_2 \vee \dots \vee \neg A_n$. Für die beiden komplementären Stellen s_1 und s_2 existieren die nicht-trivialen S-Invarianten $\underline{s}_{h,1}^{tr} = (+1, -1, 0, \dots, 0)$ und $\underline{s}_{h,2}^{tr} = (-1, +1, 0, \dots, 0)$. Da das Netztheorem infolge dieser S-Invarianten nicht erfüllt ist, darf die Netzreduktion nicht ausgeführt werden. Folglich scheidet die äquivalente Resolventenbildung für das betrachtete Klauselpaar mit mindestens zwei komplementären Literalpaaren aus.

Heterogene Klauselpaare werden durch Netzmodelle repräsentiert (Abb. 6), die nicht nur die Subnetz-, sondern auch die Aktivierungsbedingung des Netztheorems verletzen. Auch hier existiert eine semi-positive T-Invariante \underline{t}_h mit $\underline{t}_h^{tr} = (1, 1)$ für die beiden Transitionen t_1 und t_q . Abermals besitzt das charakteristische Subnetz SN_h zumindest zwei nicht-triviale S-Invarianten $\underline{s}_{h,1}$ und $\underline{s}_{h,2}$. Sie gewichten jeweils ein Paar komplementärer Stellen mit dem Einheitsgewicht gleichen Vorzeichens, während alle anderen Stellen des Netzes das Nullgewicht erhalten. Z.B. existieren für die beiden komplementären Stellen s_1 und s_2 aus Abb. 6 zwei nicht-triviale S-Invarianten mit $\underline{s}_{h,1}^{tr} = (+1, +1, 0, \dots, 0)$ und $\underline{s}_{h,2}^{tr} = (-1, -1, 0, \dots, 0)$. Dies reicht schon aus, um gegen das Netztheorem zu verstoßen. Hinzu kommt aber, daß beide Schaltfolgen $\langle t_1, t_q \rangle$ und $\langle t_q, t_1 \rangle$ mit dem gemeinsamen Schaltvektor \underline{t}_h unter der Nullmarkierung nicht aktiviert sein können. Folglich verbietet das Netztheorem aus zwei Gründen die Netzreduktion. Daher darf auch nicht die Resolvente aus den beiden repräsentierten Klauseln $K_1 \Leftrightarrow \dots \vee A_1 \vee \neg A_2 \vee \dots$ und $K_q \Leftrightarrow \dots \vee \neg A_1 \vee A_2 \vee \dots$ gebildet werden.

Mit Hilfe des Netztheorems läßt sich also plausibel belegen, daß eine Klauselresolution beim Vorliegen mehrerer Paare komplementärer Literale ausgeschlossen wird. Eine praktische Anwendung dieses Resultats betrifft Zirkelschlüsse. Eine Komplexaussage A enthält einen logischen Zirkel, wenn sie - zumindest partiell - so in Subjugate transformiert werden kann, daß dieselbe atomare Aussage A_j zugleich Antecedensbedingung als auch Konklusion eines Subjunktionzusammenhangs ist:

$$A_j \rightarrow A_1 \wedge A_1 \rightarrow A_2 \wedge \dots \wedge A_n \rightarrow A_j$$

Durch Transformation der Subjugate $A_1 \rightarrow A_2$ in ihre äquivalente Darstellungsform $\neg A_1 \vee A_2$ läßt sich jeder Zirkelschluß in konjunktiver Normalform notieren als:

$$(\neg A_j \vee A_1) \wedge (\neg A_1 \vee A_2) \wedge \dots \wedge (\neg A_n \vee A_j)$$

Zwei aufeinanderfolgende Klauseln enthalten jeweils ein komplementäres Literalpaar, z.B. die ersten beiden Klauseln die Literale A_1 und $\neg A_1$. Daher läßt sich die gewöhnliche Resolutionsprozedur für das Vorliegen von je genau einem komplementären Literalpaar rekursiv anwenden. Nach $n-1$ Schritten resultiert das Konjugat $(\neg A_j \vee A_n) \wedge (\neg A_n \vee A_j)$. Dies ist der bereits oben diskutierte Fall eines heterogenen Klauselpaars. Aufgrund der Verletzung des Netztheorems darf hieraus keine Resolvente mehr gebildet werden. Folglich läßt sich die Leerklausele aus *keinem* logischen Zirkel ableiten. Daher ist jeder Zirkelschluß im aussagenlogischen Sinn konsistent, auch wenn dies der Intuition des "gesunden Menschenverstands" zuwiderlaufen mag. Allerdings wird später aufgezeigt, daß Zirkelschlüsse durchaus auch im formallogischen Sinn als inkonsistent ausgewiesen werden können, falls der Rahmen der Aussagenlogik überschritten wird.

6.2 Prädikatenlogische Aspekte

Bisher wurde unterstellt, daß die Produktionsregeln aus der Wissensbasis eines Expertensystems als aussagenlogische Subjugate formuliert werden. Dies ist aber tatsächlich kaum der Fall. Stattdessen werden die Regeln im allgemeinen auf prädikatenlogischer Basis ausgedrückt. Doch läßt sich die prädikatenlogische Regelformulierung ebenfalls seitens der Netztheorie erfassen. Hierzu muß allerdings von den einfach strukturierten Stelle/Transition-Netzen zu den komplizierteren Prädikat/Transition-Netzen (vgl. [1], [2], [4], [8], [10], [13], [11]) übergegangen werden. Zugleich eröffnet diese reichhaltigere Repräsentationsweise zusätzliche Erkenntnismöglichkeiten für die Konsistenzüberwachung durch Netzmodelle.

Beispielsweise braucht nicht mehr an der Standardinterpretation von Netzmarkierungen festgehalten zu werden, markierte (unmarkierte) Stellen repräsentierten wahre (falsche) Aussagen. Stattdessen haben z.B. LIU und DILLON angeregt, den "Wahrheitswert" einer aussagen- oder prädikatenlogischen Formel durch zwei spezielle Markenarten "y" und "n" auszudrücken ([10], S. 121ff.). Eine Formel, die durch die Stelle s_j repräsentiert wird, ist genau dann wahr oder gültig (falsch oder ungültig), wenn die Stelle mit einer Marke der Art "y" ("n") markiert ist. Auf diese Weise wird der Wahrheitswert "falsch" nicht mehr durch das Fehlen einer Marke, sondern durch das Vorhandensein einer charakteristischen Markenart ausgedrückt.

Dieser Ansatz erweist sich aus drei Gründen als bemerkenswert. Erstens wird Wissen über Wahrheitswerte symmetrisch expliziert: Wahre und falsche Wahrheitswerte erhalten die strukturell gleichartige Repräsentation durch Marken. Zweitens können Netzmodelle auf diese Weise durch unmarkierte Stellen auch das aktuelle Nichtwissen über die Wahrheitswerte der jeweils repräsentierten Aussagen darstellen. Damit wird ihre Ausdrucksmächtigkeit auf eine dreiwertige Logik erweitert. Drittens wird ein Problem der operationalen Semantik beseitigt, das auftritt, wenn Netze dazu dienen, regelbasierte Wissensbasen von Expertensystemen darzustellen. Dann entspricht das Anwenden einer Produktionsregel dem Schalten einer Transition, die diese Regel repräsentiert. Durch das Schalten werden Marken von den Eingangsstellen der Transition abgezogen, so daß die Aussagen, die von diesen Stellen repräsentiert werden, nach der o.a. Standardinterpretation von Netzmarkierungen falsch würden. Dies widerspricht jedoch dem logischen Charakter wahrheitserhaltender Inferenzregeln. Die Anwendung einer Produktionsregel in einem Inferenzprozeß darf die Wahrheit ihrer Antecedensbedingungen nicht aufheben. Mit Hilfe des Markierungskonzepts von LIU und DILLON läßt sich diese fundamentale Anforderung an Inferenzsysteme erfüllen.

Trotz der vorgenannten Vorzüge wurde die abweichende Markierungsinterpretation in dieser Ausarbeitung nicht berücksichtigt. Denn sie erfordert für die Verwendung unterschiedlicher Markenarten den Übergang zu Prädikat/Transition-Netzen oder ähnlich komplexen Netztypen. Diese wurden hier zugunsten der leichter verständlichen Stelle/Transition-Netze nicht berücksichtigt. Darüber hinaus erfordert der Ansatz von LIU und DILLON die Benutzung von 1-Schleifen, um wahrheitserhaltende Produktionsregeln formulieren zu können ([10], S. 123). Daraus folgen notwendig unreine Netze, auf die sich LAUTENBACHS Netztheorem grundsätzlich nicht anwenden läßt. Das Netztheorem stellt aber einen zentralen Ansatzpunkt für das hier entfaltete Konsistenz-Monitoring dar.

Wenn Prädikat/Transition-Netze benutzt werden, um die einfache aussagen- durch eine reichhaltigere prädikatenlogische Wissensdarstellung zu ersetzen, muß geklärt werden, in welchem Ausmaß die Instrumente der Invarianten- und Faktetnetzanalyse übertragen werden können. Dies gilt

nicht nur für die voranstehend erörterte spezielle Markierungsinterpretation, sondern allgemein für den Übergang von Stelle/Transition- zu Prädikat/Transition-Netzen. Nur die Auswertung von Faktnetzen läßt sich ohne Schwierigkeiten unverändert übernehmen. Die Invariantenanalyse kann zwar grundsätzlich auch auf Prädikat/Transition-Netze angewendet werden. Doch stellt sie sich im allgemeinen Fall als praktisch untauglich heraus, weil die Ermittlung von Invarianten in solchen Netzen erhebliche Probleme bereitet. Daher werden Prädikat/Transition-Netze zumeist mit der Hilfe von Erreichbarkeitsgraphen untersucht. Die Knoten eines solchen Graphen sind - grob gesprochen (vgl. zur Verfeinerung [20]) - alle Markierungen, die von der Ausgangsmarkierung M_0 eines Netzes durch rekursives Anwenden seiner Schaltregel erreicht werden können. Die Kanten repräsentieren die entsprechenden Schaltakte von Transitionen, die beim Übergang zwischen zwei Markierungen ausgeführt werden müssen.

Eine nähere Darlegung der Konstruktions- und Auswertungstechniken für Erreichbarkeitsgraphen würde den hier vorausgesetzten Erkenntnisrahmen weit übersteigen (Näheres dazu bei [15], S. 75ff.). Insbesondere verlassen sie die mathematische Basis arithmetischer Kalküle, die hier in der Verbindung mit OR-Programmen besonders interessierten. Dennoch wird kurz auf die Erreichbarkeitsanalyse von Prädikat/Transition-Netzen eingegangen, um ihr grundsätzliches Erkenntnispotential für die Konsistenzüberwachung von Wissensbasen anzudeuten. Die Auswertung von prädikatenlogisch fundierten Netzmodellen für regelorientierte Wissensbasen gestattet es, folgende Konsistenzverletzungen im weitesten Sinne aufzudecken (vgl. auch [10], S. 124 u. 127ff.):

- widersprüchliche Regeln, die unter den gleichen Antecedensbedingungen angewendet werden können, aber zu Konklusionen führen, welche sich gegenseitig ausschließen;
- zirkulare Regeln, die im Verbund Zirkelschlüsse bilden;
- redundante Regeln, die denselben logischen Sachverhalt mehrfach repräsentieren;
- abundante Regeln, deren Antecedensbedingungen in der überprüften Wissensbasis unter keinen denkmöglichen Umständen erfüllt werden können;
- fehlende Regeln, die notwendig wären, um eine logisch zulässige Konklusion in der betrachteten Wissensbasis tatsächlich abzuleiten.

Widersprüchliche Regeln lassen sich besonders transparent durch die früher eingeführten Fakten zur Repräsentation von Integritätsbedingungen aufdecken. Zu diesem Zweck werden in einer Wissensbasis Sachverhalte, die Konklusionen von Regelanwendungen sein können, sich aber gegenseitig logisch ausschließen, durch Prädikate dargestellt, die niemals gleichzeitig gültig sein dürfen. Diese metasprachliche Ausschlußbeziehung wird im Netzmodell der Wissensbasis durch eine faktische Transition erfaßt. Sie ist die gemeinsame Ausgangstransition der beiden Stellen, welche die vorgenannten Prädikate repräsentieren. Diese Transition ist nur dann tot, die von ihr ausgedrückte Integritätsbedingung wird also nur dann immer erfüllt, wenn kein Schaltakt dieser Transition als Kante im Erreichbarkeitsgraphen enthalten ist.

Zirkulare Regeln stellen - wie oben im aussagenlogischen Kontext bereits aufgezeigt wurde - strenggenommen keine logischen Widersprüche im Sinne von Kontradiktionen dar. Dennoch können sie in zweifacher Hinsicht als Inkonsistenzquellen betrachtet werden. Erstens ist es möglich, daß Inferenzprozesse in einer Wissensbasis nicht terminieren, weil sie sich in einem zirkularen Regelverbund verfangen (nonterminierende Zirkel). Zweitens kann beim vollständigen Durchlaufen eines Regelzirkels die Belegung der Variablen des Ausgangsprädikats mit Konstanten verändert werden (vgl. zu einem Beispiel [10], S. 127 u. 129). Dies widerspricht aber der

Monotonieprämisse aller klassischen Logikkalküle, daß eine einmal gültige Prädikatsinterpretation im Verlauf von Inferenzprozessen nicht mehr aufgehoben werden darf (nonmonotone Zirkel).

Ein nonterminierender Zirkel läßt sich im Erreichbarkeitsgraphen durch einen Weg nachweisen, der in sich geschlossen ist. Ein nonmonotoner Zirkel kann dagegen keinen geschlossenen Weg bilden. Denn die unterschiedlichen Variablenbelegungen desselben Prädikats führen im Netzmodell zu verschiedenen Markierungen derjenigen Stelle, die das betrachtete Prädikat abbildet. Folglich startet und endet der nonmonotone Zirkel im Erreichbarkeitsgraphen in zwei unterschiedlichen Knoten. Dennoch läßt sich auch ein solcher Zirkel aufdecken. Zu diesem Zweck wird die topologische Struktur des Prädikat/Transition-Netzes auf ein Stelle/Transition-Netz mit der gleichen Topologie abgebildet. Darüber hinaus wird im Stelle/Transition-Netz eine Transition genau dann geschaltet, wenn sie auch im Prädikat/Transition-Netz geschaltet wird. Unter diesen Annahmen äußert sich ein nonmonotoner Zirkel des Prädikat/Transition-Netzes im Erreichbarkeitsgraphen des korrespondierenden Stelle/Transition-Netzes als ein in sich geschlossener Weg. Denn die unterschiedlichen Variablenbelegungen sind durch die Netztransformation - ohne Verzerrung der Schaltwege erreichbarer Markierungen - ausgeblendet worden.

Redundante Regeln bedeuten grundsätzlich keine Inkonsistenz, solange die Wissensbasen von Expertensystemen als statische Fakten- und Regelsammlungen behandelt werden. Sobald jedoch dynamische Korrekturen oder Erweiterungen der Wissensbasen zugelassen werden, können Redundanzen zu Inkonsistenzen führen. Falls von redundanten, ursprünglich konsistenten Regeln nur eine echte Teilmenge modifiziert wird, kann das Resultat der Regelveränderung den übersehenen redundanten Regeln widersprechen. Daher wird bei dynamischer Betrachtung die Inkonsistenzvermeidung unterstützt, wenn von vornherein redundante Regeln als solche bekannt sind und infolgedessen stets gemeinsam modifiziert werden. Im Erreichbarkeitsgraphen lassen sich redundante Regeln dadurch nachweisen, daß zwischen zwei Markierungen mehrere Schaltwege existieren, auf denen die erste in die zweite Markierung transformiert wird.

Abundante Regeln drücken nur in dem Sinne Inkonsistenzen aus, als daß sie auf der Metaebene durch ihre Existenz vortäuschen, ihre Konklusionen könnten in der betrachteten Wissensbasis grundsätzlich überprüft werden. Dies ist jedoch unmöglich, weil diese Regeln niemals zur Anwendung gelangen können. Auf jeden Fall blähen sie das Volumen der Wissensbasis auf, ohne einen positiven Beitrag zum Inferenzpotential des zugehörigen Expertensystems zu liefern. Solche abundanten Regeln lassen sich daran erkennen, daß die Schaltakte ihrer zugehörigen Transitionen im Erreichbarkeitsgraphen des Netzmodells nicht enthalten sind.

Fehlende Regeln setzen ein ähnlich weit gefaßtes Inkonsistenzverständnis voraus wie abundante Regeln. Im engeren Sinne bedeutet das Fehlen von Regeln die Unvollständigkeit einer Wissensbasis. Eine Wissensbasis ist unvollständig, wenn das operationale Inferenzpotential eines Expertensystems eine echte Teilmenge des logischen Inferenzpotentials seiner Wissensbasis ist, d.h. wenn sich nicht alle logisch zulässigen Schlüsse durch Anwendung seiner Produktionsregeln erzeugen lassen. Das Fehlen von Regeln läßt sich in einem Netzmodell überprüfen, indem Prädikate betrachtet werden, von denen bekannt ist, daß ihre Gültigkeit aus der jeweils untersuchten Wissensbasis logisch folgt. Diese gültigen Prädikate werden jeweils durch eine entsprechende Netzmarkierung repräsentiert. Falls diese Markierung im Erreichbarkeitsgraphen des Netzmodells nicht enthalten ist, muß die modellierte Wissensbasis unvollständig sein. Allerdings läßt sich auf diese Weise nur dann die Unvollständigkeit einer Wissensbasis nachweisen, wenn "geeignete" gültige Prädikate vorgegeben werden. Doch ist es bei praktisch relevanten Wissensbasen im allgemeinen unmöglich, die Menge aller Prädikate zu generieren, die aus ihr logisch gefolgert werden können.

Daher läßt sich die Vollständigkeit der Regelbasis eines Expertensystems nicht dadurch nachweisen, daß bezüglich einzelner untersuchter Prädikate keine Unvollständigkeit aufgetreten ist.

Über die voranstehend skizzierten Aspekte des Konsistenz-Monitoring hinaus könnte auch näher erforscht werden, ob die Theorie der Petrinetze Beiträge zur Gestaltung von Inferenzprozessen in Wissensbasen leisten könnte. Solche Ansätze werden hier aber nicht näher ausgeführt, weil sie über die Thematik des Konsistenz-Monitoring weit hinaus führen würden. Um jedoch einen Eindruck von der potentiellen Fruchtbarkeit netztheoretischer Konzepte zu vermitteln, werden zwei mögliche Inferenzbeiträge kurz skizziert.

Zunächst kann vom Netztheorem ausgegangen werden, das auf einer linearen arithmetischen Reformulierung des Resolutionskonzepts beruht. Auf der Grundlage dieses Resolutionskonzepts wurden seitens der KI-Forschung Algorithmen für das automatische Beweisen von Theoremen implementiert, die im Regelfall auf einer Lösungssuche in vielfach verzweigten logischen Bäumen beruhen. Grundsätzlich bietet es sich an zu untersuchen, ob die Entwicklung automatischer Theorembeweiser dadurch befruchtet werden kann, daß Lösungsalgorithmen für linear-ganzzahlige, homogene Gleichungssysteme aus dem Bereich der Invariantenanalyse von Netzen mit den baumorientierten Suchalgorithmen aus der Erforschung intelligenter Automaten kombiniert werden oder jene Suchalgorithmen ersetzen. Bereits LAUTENBACH hat auf die enge Verzahnung seines Netztheorems mit der KI-Forschung explizit hingewiesen ([8], S. 2 u. 32). Weitere explorative Überlegungen hierzu finden sich in [20].

Einen alternativen Ansatz haben MURATA und MATSUYAMA gewählt ([11]). Sie nutzen nicht die arithmetische Struktur des Netztheorems aus. Stattdessen verwenden sie ein Ableitungsverfahren, das zwar auf dem Resolutionskonzept aus dem Netztheorem beruht, aber zur Reduzierung von Netzmodellen auf vereinfachte Netzmodelle dient. Dabei werden die Netzreduzierungen derart vorgenommen, daß die Konsistenz oder Inkonsistenz von Netzen bezüglich ihrer Reduktionen invariant erhalten bleibt. Auf dieser Grundlage wird eine Prozedur zur Überprüfung der Gültigkeit prädikatenlogischer Formeln durch sukzessive Netzreduzierungen entwickelt. Auch dieses netzbasierte Reduktionsverfahren ließe sich dahingehend untersuchen, ob es Resolutionsprozeduren aus der KI-Forschung ergänzen oder ersetzen könnte.

7 Zusammenfassung

Petrinetze stellen eine interessante konzeptionelle Schnittstelle zwischen drei wesentlichen Modellierungsinstrumenten dar. Sie verknüpfen graphische, logische und mathematische Beiträge zur Konstruktion und Analyse von Modellen. Hierbei zeichnen sich Netzmodelle durch zwei charakteristische Vorteile aus. Einerseits erlaubt ihre graphische Repräsentationsweise, auch umfangreiche Realprobleme hinsichtlich ihrer logischen Aspekte noch relativ kompakt und transparent zu modellieren. Zugleich wird hierdurch die Kommunikation über logische Problemaspekte während der Modellgestaltung und -analyse erleichtert. Andererseits ermöglicht die weitreichende logische und mathematische Fundierung der Petrinetz-Theorie, Netzmodelle trotz ihrer Anschaulichkeit mit präzisen, leistungsfähigen und automatisch ausführbaren Algorithmen auszuwerten, die überwiegend aus dem Bereich der linearen Arithmetik stammen.