Arbeitsbericht Nr. 11

Netztheoretische Ansätze zur Konstruktion und Auswertung von logisch fundierten Problembeschreibungen

von

Dr. Stephan Zelewski

2. Auflage des Arbeitsberichts 8/1986

Köln 1986

Abstract

Es wird die Teilklasse solcher OR-Probleme betrachtet, deren Struktur wesentlich von logischen Sachverhalten bestimmt wird. Die konventionelle Abbildung solcher Sachverhalte durch 0/1-Entscheidungsvariablen führt schnell zu sehr großen, praktisch kaum noch zu handhabenden Modellen. Als Alternative hierzu wird ein Konzept zur Konstruktion und Auswertung von Modellen vorgestellt, das speziell der Repräsentation logischer Zusammenhänge dient. Grundlage ist die Umsetzung aussagen- und prädikatenlogischer Problembeschreibungen mittels der Petrinetz-Theorie in linear-ganzzahlige, homogene Gleichungssysteme. Solche diophantischen Systeme lassen sich grundsätzlich durch ein neuartiges Verfahren der Analyse von Netz-Invarianten bewältigen. Im Vordergrund steht aber nicht die Effizienz der Problemlösung. Vielmehr erfolgt primär die explorative Analyse, welche Möglichkeiten und Schwierigkeiten die Verknüpfung von Logik und Netztheorie bei der Gestaltung von OR-Modellen involviert. Diese Aspekte werden an einem Beispiel aus der Jahresabschlußgestaltung von Aktiengesellschaften im Hinblick auf Probleme der Körperschaftsteuerplanung verdeutlicht.

Inhaltsübersicht

1 Die Bedeutung logisch fundierter Problembeschreibungen für Entscheidungsmodelle

Entscheidungsmodelle für die formalsprachliche Abbildung von realen Entscheidungsproblemen werden - vor allem seitens des Operations Resesarch - oftmals in der Form von algebraischen Programmen dargestellt[1]. Solche Programme bestehen in der Regel aus einem vieldimensionalen Alternativenraum, der durch die Definitionsbereiche der Entscheidungsvariablen[2] aufgespannt wird und durch eine endliche Anzahl von Nebenbedingungen eingeschränkt werden kann. Auf das Zielsystem, das über diesem Alternativenraum zur Ableitung (ziel-)optimaler Entscheidungen definiert ist, wird hier nicht weiter eingegangen.

Der Alternativenraum, der die Menge zulässiger Problemlösungen definiert, wird in der Regel im mathematischen Sinn als dicht unterstellt, d.h. die Definitionsbereiche der Entscheidungsvariablen werden durch die Menge der rationalen Zahlen gebildet[3]. Diese Dichteprämisse kann so lange als realitätsadäquat gelten, wie die Entscheidungsvariablen reale Größen abbilden, die sich auf metrischen Skalen messen lassen. Oftmals wird das Entscheidungsfeld aber auch von logischen Sachver-

---

1) Vgl. z.B. Kern (1974), S. 47ff.; Bitz (1977), S. 65ff.; Laux (1982), S. 32ff., insbesondere S. 47ff. u. 235ff.; Ellinger (1985), S. 14ff.

2) Als Entscheidungsvariablen werden hier sowohl solche Variablen verstanden, welche unmittelbar der Formulierung von Entscheidungsalternativen zugrundeliegen, als auch solche (Struktur-)Variablen, deren Ausprägungen zwar nicht direkt von Entscheidungsalternativen festgelegt, aber doch - durch funktionale Zusammenhänge vermittelt - indirekt determiniert werden.

3) Zwar werden die Entscheidungsvariablen oftmals als reellwertig vorausgesetzt, doch erstrecken sich Algorithmen zur Lösung solcher Entscheidungsmodelle - vor allem auch deren Implementierungen durch Automatische Informationsverarbeitungssysteme - im allgemeinen nur auf Operationen mit rationalen Zahlen. Irrationale Zahlen, die z.B. den Umgang mit unendlichen Dezimalbrüchen erforderten, werden kaum beachtet.

halten bestimmt[4]. Solche Sachverhalte entziehen sich grundsätzlich einer rationalzahligen Repräsentation. Dies gilt zumindest in bezug auf die klassischen Kalküle der Aussagen- und der Prädikatenlogik (1. Ordnung), die fortan als Konkretisierungen des Logikbegriffs vorausgesetzt werden[5].

Die Integration von logischen Sachverhalten in Entscheidungsmodelle erfolgt gewöhnlich über die Einführung von speziellen, zweiwertigen (binären) Logikvariablen x_1. Diese Logikvariablen dürfen nur die Werte $x_1=1$, falls der abgebildete logische Sachverhalt wahr (gültig) ist, oder $x_1=0$ annehmen, wenn der betroffene Sachverhalt nicht zutrifft. Trotz dieser simplen Basisdefinition resultieren in der Regel gemischt-ganzzahlige[6] Entscheidungsmodelle (Programme) von sehr großer Komplexität.

---

4) Der Begriff der logischen Sachverhalte wird hier so weit gefaßt, daß er nicht nur die logischen Beziehungen zwischen (nicht-logischen) Entscheidungsvariablen umfaßt. Vielmehr erstreckt er sich auch auf logische Entscheidungsvariablen. Diese zeichnen sich dadurch aus, daß sie nur die Werte "1" oder "0" anzunehmen vermögen. Beispielsweise kann der Sachverhalt, daß ein Lager an einem bestimmten Standort errichtet wird (oder nicht), durch die Entscheidungsvariablen-Ausprägung $x_1=1$ (bzw. $x_1=0$) abgebildet werden.
Williams (1985), S. 162, differenziert entsprechend zwischen einerseits binären Entscheidungsvariablen und anderseits Indikatorvariablen, die logische Beziehungen zwischen Entscheidungsvariablen herstellen. Beide Variablentypen werden fortan unter dem Oberbegriff der Logikvariablen subsumiert.

5) Diese beiden Kalküle sind durch ihre Zweiwertigkeit gekennzeichnet, die nur zwischen wahren unf falschen bzw. gültigen und ungültigen Formeln (Aussagen bzw. Prädikaten) differenziert. Mehrwertige Logiken - wie z.B. unscharfe Logikkalküle auf der Basis der Theorie unscharfer Mengen oder Kalküle der Evidenzlogik - können sich dagegen u.U. auch auf rationalzahlige ("reelwertige") "Wahrheits"-Werte erstrecken. Für diese Logikvarianten treffen die nachfolgenden Ausführungen nicht zu.

6) Strenggenommen handelt es sich um gemischt-rational(binär)-zahlige Entscheidungsmodelle. An dem o.a. Begriff wird jedoch infolge seiner breiten Akzeptanz festgehalten.

Dies liegt einerseits an der kombinatorischen "Explosion" von Entscheidungsmöglichkeiten, die von Lösungsalgorithmen für solche gemischt-ganzzahligen Entscheidungsmodelle bewältigt werden müssen (Lösungskomplexität)[7].

Aber auch den Entscheidungsmodellen selbst kommt oftmals eine große Strukturkomplexität zu. Die Abbildung von logischen Sachverhalten mit der Hilfe von binären Logikvariablen kann zu aufwendigen, sowohl umfangreichen als auch vielfach ineinander verschachtelten Modellkonstruktionen führen[8]. Diese Strukturkomplexität wird exemplarisch durch die Ausführungen von Boos[9], Gabriel[10], Johänntgen-Holthoff[11] und Williams[12] verdeutlicht, die sich mit der Repräsentation von logischen Sachverhalten in Entscheidungsmodellen intensiv auseinandergesetzt haben.

Die nachfolgenden Ausführungen beziehen sich nur noch auf die Strukturkomplexität von (Entscheidungs-) Modellen, weil sie dem gestaltenden Einfluß während der Modellkonstruktion zugänglich ist. Die Lösungskomplexität von gemischt-ganzzahligen Modellen wird dagegen als gegeben hingenommen. Die Betrachtung der Strukturkomplexität läßt sich aus dem Zusammenwirken zweier Einflußgrößen motivieren.

---

7) Vgl. Forrest (1974), S. 736ff.; Gabriel (1982), S. 30ff. u. 192f.; Williams (1985), S. 196f. u. 227.

8) Vgl. Johänntgen-Holthoff (1986), S. 229.

9) Vgl. Boos (1986), S. 7ff., 19ff. u. 28f., in bezug auf Gestaltungsentscheidungen für Energie-Informationssysteme.

10) Vgl. Gabriel (1982), S. 15ff. u. 43ff., als umfassende Darstellung der allgemeinen, nicht auf bestimmte Anwendungsfälle zugeschnittenen Berücksichtigung von logischen Beziehungen in Entscheidungsmodellen des Operations Research.

11) Vgl. Johänntgen-Holthoff (1986), S. 44ff., speziell zu bilanzpolitischen Gestaltungsentscheidungen S. 57ff. u. 205ff.

12) Vgl. Williams (1985), S. 162ff. u. 196ff., der eine Vielzahl von Entscheidungsmodellen des Operations Research für charakteristische Klassen von Realproblemen behandelt.

Einerseits mutet die die Einführung von Logikvariablen zur Darstellung von logischen Sachverhalten oftmals artifiziell an[13]. Obwohl die Sachverhalte in logischen Formeln - und auch in deren natürlichsprachlichen Umschreibungen - in der Regel einfach und übersichtlich ausgedrückt werden können, fällt ihre Abbildung in Entscheidungsmodellen häufig sehr komplex aus[14]. Folglich kann die Strukturkomplexität keine originäre Eigenschaft der zu repräsentierenden Sachverhalte sein, sondern muß als derivative Eigenschaft aus den Methoden der Umsetzung in Logikvariablen resultieren[15]. Anderseits kommt hinzu, daß die Anwendung dieser Umsetzungsmethoden dem Modellkonstrukteur zumeist große Schwierigkeiten bereitet[16].

Es drängt sich die Suche nach alternativen Modellierungsmethoden auf, welche die Modellkonstruktion dadurch erleichtern, daß der Konstrukteur unmittelbar mit den logischen - ggf. natürlichsprachlich umschriebenen - Sachverhalten umgeht. Die hieraus resultierende logische Modellbeschreibung müßte sich durch ein allgemeingültiges, automatisierbares Schema in ein algebraisch formuliertes (Entscheidungs-)Modell umsetzen lassen.

---

13) Diese Künstlichkeit der Variablenbildung wird exemplarisch bei Williams (1985), S. 198, deutlich, der die logische Verknüpfung von Entscheidungsalternativen-Gruppen durch ein exklusives "oder" modelliert. Ähnlich artifiziell wirkt die Abbildung der Ausschließlichkeit von Entscheidungsvariablen durch quadratische Beziehungen bei Bitz (1977), S. 319.

14) Vgl. als Beispiele dieser hohen Komplexität Boos (1986), S. 20ff.; Johänntgen-Holthoff (1986), S. 178ff., insbesondere S. 181ff. (in bezug auf Entscheidungen über die Jahresüberschußverwendung oder der Jahresfehlbetragsdeckung), u. S. 205ff., insbesondere S. 212ff. (Entscheidungen über Verlustvor- und -rückträge hinsichtlich der Bemessungsgrundlage für die Körperschaftsteuer).

15) Mittelbar wird dies durch die Ausführungen von Williams (1985), S. 196ff., unterstrichen, der zwischen "guten" und "schlechten" Modellierungen von logischen Sachverhalten unterscheidet. Denn eine solche Variabilität der Modellierungsqualität kann nicht aus dem einheitlich vorgegebenen Modellierungsobjekt (dem abzubildenden Realproblem), sondern nur aus dem Prozeß der Problemabbildung folgen.

16) Vgl. Gabriel (1982), S. 15f. Diese Schwierigkeit folgt auch aus der Anforderung, "schlechte" Modellierungen zu vermeiden, die in der voranstehenden Fußnote angesprochen wurde.

Auf diese Weise würde der Modellkonstrukteur von der schwierigen Aufgabe der Bildung von Logikvariablen befreit und könnte sich auf den wesentlichen Aspekt konzentrieren, die problemrelevanten logischen Sachverhalte zu modellieren[17)]. Ferner ist zu überprüfen, ob solche Modellierungsmethoden die artifizielle Komplexität, die durch die Einführung von Logikvariablen verursacht wird, zu vermeiden - oder doch zumindest zu verringern - vermögen.

Vor diesem Hintergrund wirkt es erstaunlich, daß die meisten Ausführungen von Autoren, die sich aus der Sicht des Operations Research mit der Erfassung von logischen Sachverhalten befassen[18)], auf den komplexen Gebrauch von Logikvariablen beschränkt bleiben. Der Einsatz von Logikvariablen ist zwar in dem Sinn lösungsadäquat[19)], daß auf entsprechend formulierte algebraische Modelle die Lösungsalgorithmen für gemischt-ganzzahlige Programme unmittelbar angewendet werden können. Doch sie erweisen sich infolge der umsetzungsbedingten Komplexion, die den zu modellierenden logischen Sachverhalten keineswegs inhäriert, als wenig problemadäquat[20)].

Die Beschäftigung mit der Modellierung von logischen Sachverhalten wird durch zwei Gründe nahegelegt. Erstens fließt in Modelle des Operations Research eine Vielzahl solcher Sachverhalte ein, ohne daß ihre logische Natur immer explizit deutlich wird. Beispielswei-

---

17) Die Ausführungen beziehen sich nur auf diejenigen Modellausschnitte, die sich auf die Abbildung von logischen Sachverhalten erstrecken. Die rationalzahligen gewöhnlichen Modellkomponenten werden nicht explizit angesprochen, aber implizit als gegeben unterstellt.

18) Vgl. die Quellenangaben in den Fußnoten 9) bis 12).

19) Vgl. zur Unterscheidung zwischen lösungs- und problemadäquater Modellbildung Bitz (1977), S. 60ff.; Johänntgen-Holthoff (1986), S. 42f.

20) Um so mehr erstaunt es, daß Autoren, die den Primat der problem- vor der lösungsadäquaten Modellgestaltung anerkennen, dennoch unmittelbar zur artifiziellen "Krücke" der Logikvariablen greifen. Vgl. hierzu etwa die Ausführungen von Johänntgen-Holthoff (1986), S. 42ff.

se[21] beruhen Prioritäten bei der Einplanung von Fertigungsaufträgen, Ausschließlichkeits- und Vollständigkeitsbedingungen bei Zuordnungsmodellen oder das Anfallen von Fixkosten bei positiven Produktionsmengen, falls diese Fixkosten bei Produktionseinstellung abgebaut werden können, auf logischen Sachverhalten.

Zweitens kann die derzeit diskutierte Annäherung zwischen Operations Research und Erforschung der Künstlichen Intelligenz[22] dazu führen, seitens des Operations Research verstärkt mit (explizit) logischen Problembeschreibungen konfrontiert zu werden. Denn in der Künstlichen Intelligenz-Forschung zählt die logische Wissensrepräsentation[23] zu den wichtigsten Konzepten für die Beschreibung von Problemen. Die beabsichtigte Einbindung von Lösungsalgorithmen des Operations Research in Expertensysteme z.B. erfordert, logisch repräsentiertes Expertenwissen in formalsprachliche Problembeschreibungen zu integrieren, auf welche diese Algorithmen angewendet werden können.

Aber auch außerhalb der Künstlichen Intelligenz finden explizite logische Sachverhaltsbeschreibungen für betriebswirtschaftliche Problemstellungen zunehmend Beachtung. Hierzu zählen beispielsweise die Ausführungen von Bonczek, Holsapple und Whinston zur Gestaltung von entscheidungsunterstützenden Systemen, deren Modellkomponente durch (prädikaten-)logische Formeln realisiert wird[24].

---

21) Einen breiten Überblick über logische Aspekte bei der Gestaltung von OR-Modellen bietet Williams (1985), S. 163ff.

22) Vgl. zur Erörterung möglicher ein- oder auch beidseitiger Befruchtungen dieser Disziplinen Müller-Merbach (1984), S. 7ff.; Thornton (1985), S. 281ff.; sowie hinsichtlich eines konkreten Brückenschlags Bullers (1980), S. 351ff.

23) Dies gilt insbesondere auch in Verbindung mit den Repräsentationskonzepten der Produktionsregelsysteme (logische Formeln zur Regelformulierung) und der semantischen Netze (logische Formeln zur Beschreibung der Knoten- und Kantenbedeutungen).

24) Vgl. Bonczek (1981), S. 263 u. 270ff.

2 Abbildung logischer Sachverhalte auf Netzmodelle

2.1 Netztheoretische Grundlegung

Ein breites Spektrum von logischen Sachverhalten läßt sich durch den Kalkül der Prädikatenlogik (1. Ordnung) erfassen[25]. Dies gilt insbesondere im Hinblick auf diejenigen Problemstellungen, die typisch für Modellierungsaufgaben des Operations Research sind. Denn für diese spielen logische Erweiterungen, wie sie z.B. durch die Berücksichtigung notwendiger, erlaubter und unmöglicher Sachverhalte im Rahmen der Modallogik erfolgen, in der Regel keine Rolle.

Oftmals kann sogar der prädikatenlogische Kalkül durch den formal weniger anspruchsvollen Kalkül der Aussagenlogik[26] ersetzt werden. Denn die meisten logischen Sachverhalte, die es in Modellen des Operations Research zu erfassen gilt, lassen sich mit der Hilfe von variablenfreien Aussagen ausdrücken[27]. Daher konzentrieren sich die nachfolgenden Erörterungen auf eine aussagenlogische Darstellungsweise. Dies bedeutet keine wesentliche Einschränkung, weil die vorgestellten Beiträge der Netztheorie nicht nur für die Aussagen-, son-

---

25) Vgl. Whitehead (1925), S. 14ff. u. 38ff.; Stegmüller (1983), S. 87ff.; Zelewski (1986a), S. 181ff., der auch auf Anwendungsaspekte dieses Kalküls näher eingeht.

26) Vgl. zur Aussagenlogik Stegmüller (1983), S. 76ff.

27) Vgl. zur aussagenlogischen Ausrichtung von Entscheidungsmodellen Williams (1985), S. 169ff.; Johänntgen-Holthoff (1986), S. 45ff. Erst wenn logische Formeln ("Prädikate") benutzt werden, die in Abhängigkeit von Variablen definiert sind, welche durch unterschiedliche Objekte (Individuen) ersetzt werden können, muß auf den Kalkül der Prädikatenlogik zurückgegriffen werden. Eine der seltenen Anwendungen der Prädikatenlogik (1. Ordnung) auf Problemstellungen des Operations Research findet sich bei Bullers (1980), S. 354ff.; dort wird die Steuerung eines Flexiblen Fertigungssystems modelliert.

dern auch für die Prädikatenlogik (1. Ordnung) gelten[28].

Ausgangspunkt ist die Möglichkeit, (aussagen-)logische Sachverhalte durch Petrinetze in der speziellen Variante der Stelle/Transition-Netze abzubilden. Es wird versucht aufzuzeigen, daß folgende Modellierungsqualitäten erfüllt werden:

- Durch die Netze können alle logischen Sachverhalte dargestellt werden (Vollständigkeit).
- Die Darstellung erfolgt in "natürlicher" Weise, d.h. die Sachverhalte lassen sich vom Modellkonstrukteur in einer ihm vertrauten Art formulieren (Natürlichkeit).
- Es existiert ein Schema, nach dem die Netze automatisch in algebraische Problembeschreibungen, also in mathematische Programme transformiert werden können (Programmierbarkeit).

Hinzu kommt in bezug auf das oben angesprochene Zusammenrücken von Operations Research und Künstlicher Intelligenz-Forschung, daß Petrinetze zunehmend für die Wissensrepräsentation auf logischer Basis herangezogen werden[29].

Ein Stelle/Transition-Netz[30] läßt sich algebraisch als ein 6-Tupel STN = (S,T,F,K,W,M_0) mit nachfolgend beschriebenen Eigenschaften definieren.

S ist eine endliche Menge von Objekten s_j (mit $j = 1,\ldots,n$), die als Stellen bezeichnet werden. Sie zeichnen sich durch die Möglichkeit aus, durch bewegliche Objekte - sogenannte "Marken" - belegt zu werden.

---

28) Dies trifft zumindest hinsichtlich der Strukturkomplexität von Modellen zu. In bezug auf die Lösungskomplexität ist dagegen anzumerken, daß netztheoretisch fundierte Modelle auf prädikatenlogischer Basis u.U. nicht mehr problemlos gelöst werden können; vgl. Lautenbach (1984), S. 28ff.; Mainz (1984), S. 90ff., insbesondere S.101; Fidelak (1986a), S. 52f. u. 59ff., insb. S. 63, 72, 84 u. 89f. Solche Lösungsschwierigkeiten treten bei aussagenlogischer Betrachtungsweise jedoch nicht auf.

29) Vgl. Zisman (1978), S. 57ff., insbesondere S. 61ff.; Azema (1984), S. 510ff.; Mainz (1984), S. 11ff.; Giordana (1985), S. 3ff., insbesondere S. 8ff.; Fidelak (1986a), S. 19ff. u. 108ff.; Fidelak (1986b), S. 32ff.

30) Vgl. Jantzen (1980), S.167ff.; Reisig (1985), S. 62ff.

T ist eine endliche Menge von Objekten t_i (mit i = 1,...,m), die Transitionen heißen. Sie unterscheiden sich von Stellen grundsätzlich durch ihren dynamischen Charakter. Sie können während eines "Schaltprozesses" Marken von (vorgelagerten) Stellen abziehen und auf (nachgelagerten) Stellen ablegen.

$F \subseteq SxT \cup TxS$ ist die Flußrelation aus geordneten 2-Tupeln (s_j,t_i) oder (t_i,s_j), die Stellen und Transitionen miteinander verknüpft. Dies geschieht in der Richtung des Markenflusses, der zwischen den Stellen durch das Schalten der Transitionen verursacht wird. Wenn eine Stelle und eine Transition unmittelbar benachbart sind, d.h. durch eine Kante miteinander verknüpft werden, heißen sie "inzident".

Es wird $S \cap T = \emptyset$ und $S \cup T \neq \emptyset$ vorausgesetzt. Ferner wird unterstellt, daß die Flußrelation Stellen und Transitionen vollständig verknüpft, d.h. es gibt weder isolierte Stellen noch Transitionen. Folglich ergibt die Vereinigung von Definitions- und Wertebereich der Flußrelation die Objektmenge $S \cup T$.

Die graphische Repräsentation des Tripels G = (S,T,F) ist ein bipartiter, gerichteter Graph ("Netz") mit zwei artverschiedenen Knoten: den Stellen und den Transitionen, die als Kreise bzw. als Quadrate symbolisiert werden[31]. Die gerichteten Kanten zwischen Stellen und Transitionen werden jeweils durch ein 2-Tupel der Flußrelation (Kantenursprung als erste, Kantenspitze als zweite Tupel-Komponente) definiert.

$K : S \rightarrow N \cup \{u\}$[32] ordnet jeder Stelle die Kapazität maximal auf ihr zulässiger Marken zu. Fortan wird eine unbeschränkt ("u") hohe Markenkapazität für jede Stelle angenommen, so daß diese Netzgröße nicht mehr explizit behandelt werden muß. Durch die Gewichtsfunktion $W : F \rightarrow N$ wird jedes 2-Tupel der Flußrelation - also jede Netzkante - mit dem Kantengewicht w versehen. Es gibt die Anzahl der Marken an, die bei jedem Schalten

31) Vgl. hierzu die exemplarische Darstellung in Abb. 1 des Anhangs.

32) Mit "N" wird die Menge der natürlichen Zahlen (einschließlich der Null), mit "u" eine beliebige, unbeschränkt große Zahl bezeichnet.

der zur Kante gehörigen ("adjazenten") Transition in Kantenrichtung bewegt werden. $M_0 : S \to N$ schreibt als Ausgangsmarkierung jeder Stelle eine Anzahl von Marken zu, die sich auf ihr im Ausgangszustand des Netzes befinden. Die Markierungsfunktion M_0 wird oftmals in der inhaltlich äquivalenten Form des Markierungsvektors $\underline{M}_0$ verwendet, der mit $\underline{M}_0^T = (M_0(s_1),\ldots,M_0(s_n))$[33] in seiner j-ten Komponente die Markenanzahl $M_0(s_j)$ der Stelle s_j unter der Ausgangsmarkierung M_0 ausweist[34].

Die statische Netzstruktur, die aus den Knotenmengen S und T, der Kantenmenge F sowie der Gewichtsfunktion W gebildet wird[35], läßt sich durch die Inzidenzmatrix $\underline{C}$ mit n Zeilen für die Stellen s_j $(j = 1,\ldots,n)$ und m Spalten für die Transitionen t_i $(i = 1,\ldots,m)$ beschreiben, wobei für jeden ihrer Koeffizienten $c_{i.j}$ gilt:

$$c_{i.j} = \begin{cases} -w(s_j,t_i) & ; \text{ falls } (s_j,t_i)\in F \\ 0 & ; \text{ falls } (s_j,t_i)\notin F \wedge (t_i,s_j)\notin F \\ +w(t_i,s_j) & ; \text{ falls } (t_i,s_j)\in F \end{cases}$$

Die dynamische Netzstruktur wird einerseits durch die Ausgangsmarkierung $\underline{M}_0$ im Sinne einer Randbedingung festgelegt. Anderseits ist sie implizit durch die Schaltregel der Transitionen definiert. Sie besteht für Stelle/Transition-Netze aus einer Abbildung SR von Vorgängermarkierungen $\underline{M}$ und schaltenden Transitionen t_i auf Nachfolgermarkierungen $\underline{M}'$:

$$\begin{aligned} SR : \quad & N^n \times T \to N^n \\ & (\underline{M},t_i) \to \underline{M}' = \underline{M} + \underline{C} \cdot \underline{t}_i \quad ; \quad \text{falls} \\ & \qquad M(s_j,t_i) \geqslant w(s_j,t_i) \quad \text{für alle } s_j\in V(t_i) \end{aligned}$$

Hierbei umfaßt der Vorbereich $V(t_i)$ der Transition t_i alle Stellen s_j, die ihr - gemäß der Flußrelation F - unmittelbar vorgelagert sind. $\underline{t}_i$ ist der Schaltvektor der Transition t_i. Er besitzt als m-stelliger Spalten-

---

33) Vektoren sind hier grundsätzlich als Spaltenvektoren definiert. Wenn sie als Zeilenvektoren dargestellt werden sollen, wird dies durch das Superskipt "T" für die transponierte Vektorform wiedergegeben.

34) Unter den Markierungsbegriff wird nachfolgend sowohl die Markierungsfunktion als auch der Markierungsvektor subsumiert.

35) Die Kapazitäts-Abbildung wird infolge der o.a. Voraussetzung nicht weiter berücksichtigt, bildet jedoch grundsätzlich auch ein Element der statischen Netzstruktur.

vektor nur an der i-ten Stelle eine 1, sonst besteht er aus den Komponenten 0.

Die zweiteilige Schaltregel bewirkt, daß eine Transition t_i nur dann schalten kann, wenn sich auf den Stellen s_j ihres Vorbereichs jeweils mindestens so viele Marken befinden, wie durch das Schalten der Transition über die Kanten (s_j,t_i) mit den Gewichten $w(s_j,t_i)$ abgezogen würden (Aktivierungsbedingung). Wenn eine derart aktivierte Transition schaltet, zieht sie von ihren unmittelbar vorgelagerten Stellen so viele Marken ab und belegt ihre unmittelbar nachgelagerten Stellen mit so vielen Marken, wie durch die Gewichte der adjazenten Kanten bestimmt und durch die Koeffizienten der Inzidenzmatrix $\underline{C}$ wiedergegeben wird. Eine aktivierte Transition kann, muß aber nicht schalten.

Wenn die Folge $f = (t_{i(1)},t_{i(2)},\ldots,t_{i(z)})$ aus z - nicht notwendig verschiedenen[36] - Transitionen im aktuellen Netzzustand, der durch die Markierung $\underline{M}$ beschrieben ist, geschaltet wird, resultiert die Markierung $\underline{M}'$ nach Schalten der letzten (der z-ten) Transition. Diese Markierung wird ermittelt, indem die Schaltregel jeweils für das Schalten einer Transition $t_{i(h)}$ mit h=2,...,z aus der Folge f auf diejenige Markierung angewendet wird, die von ihrer Vorgänger-Transition $t_{i(h-1)}$ erzeugt wurde. Wenn der m-stellige Spaltenvektor $\underline{t}_f$ in seiner i-ten Komponente angibt, wie oft Transition t_i in der Folge f geschaltet wird, gilt:

$$\underline{M}' = \underline{M} + \underline{C} \cdot \underline{t}_f$$

2.2 Konstruktion logisch fundierter Netzmodelle

Auf der voranstehend ausgeführten netztheoretischen Grundlage läßt sich jede Formel eines aussagenlogischen Kalküls abbilden. Diese Formeln (Aussagen) können entweder atomar oder zusammengesetzt sein. Als Operatoren für die Zusammensetzung atomarer Aussagen werden hier

36) In einer solchen Folge kann dieselbe Transition mehrmals - auch unmittelbar hintereinander - geschaltet werden.

die Negation ($\neg$ für "nicht"), die Konjunktion ($\wedge$ für "und"), die Adjunktion ($\vee$ für "oder" im inklusiven, nicht ausschließlichen Sinn) und die Subjunktion (-> für "wenn ..., dann ...") vorausgesetzt[37].

Für die Transformation von aussagenlogischen Formeln in äquivalente Stelle/Transition-Netze gelten folgende Regeln[38]:

Jede atomare Aussage A_j wird durch ein atomares Netz $G_j = (\{s_j\},\{t_i\},\{(t_i,s_j)\})$ aus einer Stelle s_j, einer Transition t_i und einer Kante, die von der Transition zu der Stelle gerichtet ist, repräsentiert. Aussagenspezifisch ist also nur die - gleichindizierte - Stelle, während hinsichtlich der Indizierung der Transition ein Freiheitsgrad besteht.

Die Negation $\neg A_j$ einer atomaren Aussage A_j wird dargestellt durch das komplementäre atomare Netz $G_{\neg j} = (\{s_j\},\{t_i\},\{(s_j,t_i)\})$, das sich vom Netz G_j nur durch die Inversion der Kantenrichtung unterscheidet. Die Negation einer zusammengesetzten Aussage wird durch Anwendung der Umformungsgesetze von de Morgan[39] in die Negate ihrer Komponenten transformiert, also im Endeffekt auf die Negate der zugrundeliegenden atomaren Aussagen zurückgeführt.

---

37) Um die Vollständigkeit der Erfassung aussagenlogischer Sachverhalte nachzuweisen, reicht bereits die Betrachtung von Negation und Adjunktion oder von Negation und Konjunktion aus, da hierdurch alle aussagenlogischen (zusammengesetzten) Formeln erzeugt werden können. Der Übersichtlichkeit halber, insbesondere im Hinblick auf die Natürlichkeit der Darstellungsweise, wird hier aber ein breiterer, strukturell redundanter Operatoren-Katalog zugrundegelegt. Außerdem setzt die unten erörterte Aussagen-Darstellung in konjunktiver Normalform infolge ihres Verzichts auf logische Klammer-Ausdrücke voraus, daß Negation, Konjunktion und Adjunktion benutzt werden. Es wird immer unterstellt, daß der Negations-Operator höhere Anwendungspriorität besitzt als die - gleichgeordneten - Konjunktions- und Adjunktions-Operatoren (und daß diese wiederum dem Subjunktions-Operator vorangehen).

38) Vgl. die Konstruktionen bei Lautenbac (1985), S. 4ff., der jedoch die Konstruktionsregeln nicht explizit anführt.

39) Diese Umformungsgesetze lauten für die Negation von Kon- und Adjugaten:

$$\neg(A_j \wedge A_k) \iff \neg A_j \vee \neg A_k$$
$$\neg(A_j \vee A_k) \iff \neg A_j \wedge \neg A_k$$

Die Adjunktion zweier atomarer Aussagen A_j und A_k wird durch die Vereinigung der zugehörigen atomaren Netze G_j bzw. G_k in der Weise gebildet, daß die Transitionen der beiden Netze miteinander identifiziert werden. Sie bilden die gemeinsame Eingangstransition t_i der aussagespezifischen Stellen:

$$G_{j \vee k} = G_i = (\{s_j, s_k\}, \{t_i\}, \{(t_i, s_j), (t_i, s_k)\})$$

Die Adjunktion zweier negierter atomarer Aussagen erfolgt in analoger Weise dadurch, daß die die Transitionen der beiden zugehörigen Netze miteinander identifiziert werden. Die resultierende gemeinsame Transition ist nun aber per constructionem die gemeinsame Ausgangstransition der aussagespezifischen Stellen.

Die Adjunktion von mehr als zwei atomaren Aussagen oder deren Negaten erfolgt nach dem gleichen Schema vermittels einer identischen Transition, die alle aussagespezifischen Stellen als deren gemeinsame Ein- oder Ausgangstransition verknüpft.

Die Konjunktion zweier atomarer oder negiert-atomarer Aussagen A_j und A_k erfolgt durch die Vereinigung der zugehörigen atomaren Netze G_j bzw. G_k in der Weise, daß die Transitionen der beiden Netze als artverschieden indiziert werden. Für zwei atomare Aussagen[40] gilt:

$$G_{j \wedge k} = (\{s_j, s_k\}, \{t_j, t_k\}, \{(t_j, s_j), (t_k, s_k)\})$$

Für den Normalfall nicht-identischer Aussagen A_j und A_k ist das Netz unzusammenhängend.

Die Konjunktion von mehr als zwei (negiert-)atomaren Aussagen wird nach dem gleichen Schema abgewickelt. Die Konjunktion von Aussagen, die aus (negiert-)atomaren Aussagen zusammengesetzt sind, weist die Besonderheit auf, daß die aussagespezifischen Stellen von (negiert-) atomaren Aussagen, die in mehreren zusammengesetzten Aussagen enthalten sind, einen kantenvermittelten Zusammenhang der Teilnetze, welche jeweils die zusammengesetzten Aussagen repräsentieren, herstellen.

40) Bei einer negiert-atomaren Aussage muß die Kantenrichtung invertiert werden. Vgl. hierzu die allgemeine Repräsentationsregel für Klauseln auf S. 14f.

Komplexere zusammengesetzte Aussagen als die voranstehend genannten lassen sich rekursiv auf die o.a. Grundoperationen zurückführen. Wegen ihrer besonderen Bedeutung für die Wissensrepräsentation und für die Gestaltung von Netzmodellen wird die Abbildung der Subjunktion auf ein Netz besonders herausgestellt.

Die Subjunktion zweier atomarer Aussagen A_j und A_k geschieht durch die Vereinigung der zugehörigen atomaren Netze G_j bzw. G_k derart, daß die Transitionen der beiden Netze miteinander identifiziert werden. Die resultiernde Transition t_i bildet die Ausgangstransition der Stelle, die für die Antecedensaussage (A_j) spezifisch ist, und die Eingangstransition der Stelle, welche der Konklusionsaussage (A_k) entspricht[41]:

$$G_{j->k} = G_i = (\{s_j,s_k\},\{t_i\},\{(s_j,t_i),(t_i,s_k)\})$$

Jede zusammengesetzte aussagenlogische Formel läßt sich in der konjunktiven Normalform darstellen[42]. Eine solche Normalform besteht aus der konjunktiven Verknüpfung einer endlichen Anzahl von Klauseln. Jede Klausel setzt sich ihrerseits nur aus atomaren Aussagen oder deren Negaten zusammen, die unter den Oberbegriff der Literale (auch: "Fakten") subsumiert werden. Alle Literale sind in einer Klausel adjunktiv verknüpft. Eine Klausel A_i aus Literalen L_q, die entweder atomare Aussagen A_j oder deren Negate $\neg A_j$ aus einer Menge von insgesamt k atomaren Aussagen darstellen, läßt sich durch folgende komplexe Regel mittels eines Netzes G_i repräsentieren:

- Ordne der Klausel A_i die Transition t_i zu.
- Ordne jeder atomaren Aussage A_j, aus der die Klausel A_i gebildet wird, die Stelle s_j zu.
- Verknüpfe die Stelle s_j und die Transition t_i mit einer Kante, die von der Stelle (Transition) zur Transition (Stelle) gerichtet ist, falls das Literal L_q aus einer (nicht-)negierten atomaren Aussage A_j besteht.

41) Diese Konstruktionsweise ergibt sich notwendig aus der o.a. Repräsentation von Negaten und Adjugaten. Denn das Subjugat A_j->A_k ist äquivalent mit der Formel $\neg A_j \vee A_k$.

42) Vgl. Chang (1973), S. 13.

Es resultiert das klauselspezifische Netz G_i mit:

$G_i = (\{s_1,\ldots,s_k\},\{t_i\},\{ka(s_1/t_i),\ldots,ka(s_n/t_i)\})$,

wobei für alle $j = 1,\ldots,k$ gilt:

$$ka(s_j/t_i) = \begin{cases} (t_i,s_j), \text{ falls } L_q = A_j \text{ Literal von } A_i \\ (s_j,t_i), \text{ falls } L_q = \neg A_j \text{ Literal von } A_i \end{cases}$$

Für Klauseln stellen die oben aufgelisteten Repräsentationsregeln Sonderfälle der hier ergänzten allgemeingültigen Repräsentationsregel dar[43]. Der konjunktiven Verknüpfung von Klauseln einer beliebigen zusammengesetzten Aussage in konjunktiver Normalform entspricht die o.a. konjunktive Netzvereinigung.

Durch die voranstehenden Regeln wird die Vollständigkeit der Abbildung aussagenlogischer Sachverhalte auf Stelle/Transition-Netze gewährleistet. Für die weitergehende Darstellung von prädikatenlogischen Sachverhalten sind grundsätzlich Prädikat/Transition-Netze[44] geeignet, die das Konzept der Stelle/Transition-Netze durch die Einführung von qualitativ unterschiedlichen Markenarten und eine entsprechende Modifizierung der Schaltregel erweitern.

In zahlreichen Fällen ist ein solcher Übergang auf Prädikat/Transition-Netze jedoch nicht erforderlich. Denn einerseits können endliche Prädikat/Transition-Netze durch Entfaltung auf Stelle/Transition-Netze abgebildet werden[45]. Dies ist der Fall, wenn die zu repräsentierenden prädikatenlogischen Formeln (Prädikate) über endlichen Individuenmengen definiert sind. Anderseits fallen prädikatenlogische Sachverhaltsbeschreibungen oftmals so einfach aus, daß sie sich direkt mit

43) Dies kann leicht dadurch nachgewiesen werden, daß die allgemeine Repräsentationsregel auf spezielle Aussagen angewendet wird, die keine negierten atomaren Aussagen (Adjunktion der vorhandenen atomaren Aussagen), nur genau eine negierte atomare und keine nicht-negierte atomare Aussage (Negation der atomaren Aussage) oder genau eine negierte und genau eine nicht-negierte atomare Aussage (Subjunktion der beiden atomaren Aussagen) enthalten.

44) Vgl. Genrich (1980), S. 76ff., insbesondere S. 79ff.; Genrich (1981), S. 117ff.; vgl. bezüglich der Darstellung logischer Sachverhalte (in Klauselform) durch solche Netze Mainz (1984), S. 11ff.; Lautenbach (1985), S. 7ff. u. 29f.

45) Vgl. Lautenbach (1985), S. 11f. u. 17.

der Hilfe von Stelle/Transition-Netzen darstellen lassen[46]. Solche einfachen Verhältnisse liegen z.B. dann vor, wenn sich die Prädikate stets nur auf dasselbe Individuum beziehen. Diese Möglichkeit, auch prädikatenlogische Sachverhalte durch Stelle/Transition-Netze zu erfassen, rechtfertigt nachträglich die oben erfolgte Einschränkung auf diesen - im Vergleich zu Prädikat/ Transition-Netzen - leichter zu handhabenden Petrinetz-Typ.

Das Ergebnis der Abbildung von logischen Sachverhalten, die für die Behandlung eines Realproblems wesentlich sind, auf ein Stelle/Transition-Netz stellt das problembeschreibende[47] Netzmodell dar.

Die Konstruktion von Netzmodellen kann als natürliche Verfahrensweise angesehen werden, weil sie unmittelbaren Bezug auf die abzubildenden logischen Sachverhalte (Aussagen und Aussageverknüpfungen) nimmt. Im Gegensatz zur Anwendung von Logikvariablen sind keine artifiziellen Hilfskonstruktionen[48] erforderlich. Dies gilt insbesondere dann, wenn die ursprüngliche natürlichsprachliche Problembeschreibung im wesentlichen durch "Wenn ..., dann ..."-Regeln erfolgt. Solche Regeln sind im betriebswirtschaftlichen Kontext - beispielsweise in der Gestalt von Entscheidungstabellen - vielfach üblich[49]. Diese Regeln haben die Form von (zusammengesetzten) Subjugaten und können stets formalsprachlich als Klauseln ausgedrückt werden. Wegen der einfachen und unmittelbaren Transformationsmöglichkeit von Klauseln in Stelle/Transition-Netze mit jeweils einer Transition könne solche problembeschreibenden Regelmengen in natürlicher Weise auf Netzmodelle abgebildet werden.

---

46) Vgl. Fidelak (1986a), S. 19ff.; Fidelak (1986b), S. 32ff., insbesondere S. 33.

47) Es handelt sich nur um eine partielle Problembeschreibung, weil eine Einschränkung auf die problemrelevanten logischen Sachverhalte erfolgte; vgl. auch die Anmerkung in Fußnote 17).

48) Vgl. zu einer solchen Hilfskonstruktion z.B. Boos (1986), S. 21ff.

49) Vgl. Gabriel (1982), S. 15; Zelewski (1986a), S. 207f., in bezug auf das betriebswirtschaftliche Konzept technologischer Aussagesysteme.

3 Auswertung von Netzmodellen

3.1 Transformation von Netzmodellen in Gleichungssysteme

Das Netzmodell der logischen Sachverhalte aus einer vorgegebenen - natürlichsprachlichen oder aussagenlogisch formalisierten - Problembeschreibung ist durch das Stelle/Transition-Netz STN = (S,T,F,W,M_0)[50)] gegeben. Das Quartupel (S,T,F,W) der statischen Netzstruktur wird durch die Inzidenzmatrix $\underline{C}$ algebraisch repräsentiert. Durch die Schaltregel wird die dynamische Netzstruktur mit Hilfe der Markierungen $\underline{M}$ (Referenzmarkierung) und $\underline{M}'$ (Folgemarkierung) auf ein linear-ganzzahliges Gleichungssystem GS: $\underline{M}' = \underline{C} \cdot \underline{t} + \underline{M}$ abgebildet. Hierbei bezeichnet $\underline{t}$ den Vektor mit den Schaltanzahlen derjenigen Transitionen, welche die Netzveränderungen durch das Fortschalten des Markenflusses verursachen.

Ein wesentliches Ergebnis der (Petri-)Netztheorie ist, daß die Nichterfüllung eines Komplexes aus logischen Sachverhalten, die für jede zulässige Lösung des modellierten Problems gefordert wird, mit einer bestimmten Lösung des Gleichungssystems GS äquivalent ist. Diesem Netztheorem[51)] zufolge können die Aussagen, die von einem endlichen Netzmodell STN repräsentiert werden[52)], genau dann miteinander nicht widerspruchsfrei vereinbart werden, wenn für das Gleichungssystem

---

50) Die Kapazitätsfunktion wird - wie eingangs durch die Wahl unbeschränkt großer Markenkapazitäten festgelegt - nicht explizit berücksichtigt.

51) Vgl. Lautenbach (1985), S. 24 i.V.m. S. 19ff., wo die wesentlichen Beweisschritte für dieses Netztheorem erfolgen; Fidelak (1986a), S. 19; Fidelak (1986b), S. 38.

52) Ein Netz(modell) ist endlich, wenn seine Stellen- und seine Transitionenmenge jeweils endlich sind. (Die Flußrelation, die Gewichts-, Kapazitäts- und Markierungsfunktion sind dann notwendig auch endlich.) Infolge der o.a. Konstruktion von Netzmodellen zur Repräsentation von Aussagesystemen, die (zusammengesetzte) Aussagen in konjunktiver Normalform darstellen, ist die Endlichkeit der Netze äquivalent mit Aussagen, die jeweils nur aus endlich vielen Klauseln (abgebildet auf Transitionen) bestehen, die sich ihrerseits nur aus endlich vielen Literalen (dargestellt durch Stellen) zusammensetzen. Dementsprechend beschränkt auch Lautenbach (1985), S. 24, sein Netztheorem auf endliche Klauselmengen mit endlich vielen Literalen.

GS mindestens eine semi-positive T-Invariante $\underline{t}$[53] existiert und wenn das Subnetz S-STN($\underline{t}$), das jeweils von der T-Invariante $\underline{t}$ aufgespannt wird, keine nicht-triviale S-Invariante[54] enthält[55].

Eine T-Invariante des Gleichungssystems GS ist als ein ganzzahliger[56] Schaltvektor $\underline{t} \in Z^m$ definiert, dessen Anwendung auf jede (zulässige) Referenzmarkierung $\underline{M}$ als Folgemarkierung $\underline{M}'$ die Referenzmarkierung reproduziert, die Markierung des Netzes also insgesamt unverändert läßt. Formal läßt sich dies ausdrücken durch:

$$\underline{M}' = \underline{C} \cdot \underline{t} + \underline{M} \quad \wedge \quad \underline{M}' = \underline{M}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \underline{C} \cdot \underline{t} = \underline{0}$$

Jede nicht-negative, vom Nullvektor verschiedene, ganzzahlige Lösung $\underline{t} \in N^m - \{\underline{0}\}$ des homogenen, linear-ganzzah-

53) Lautenbach (1985), S. 24, fügt in seinem Theorem noch hinzu, die T-Invariante diene zur Reproduktion der Nullmarkierung. Da diese Eigenschaft jedoch per definitionem für jede T-Invariante zutrifft, stellt sie keine konstitutive, sondern nur eine erläuternde Theoremkomponente dar.

54) Das Subnetz S-STN($\underline{t}$), wird aus dem Bezugsnetz STN dadurch gebildet, daß aus dem Netz STN alle Transitionen eliminiert werden, welche durch die zuvor nachgewiesene T-Invariante $\underline{t}$ nicht mindestens einmal geschaltet werden. Es werden alle Stellen und Kanten aus dem Netz STN unverändert übernommen, die bezüglich der nicht-eliminierten Transitionen inzident bzw. adjazent sind. Alle übrigen Stellen und Kanten werden ebenfalls eliminiert. Kantengewichte und Ausgangsmarkierung werden in entsprechender Weise nur auf die nicht-eliminierten Kanten bzw. Stellen unverändert übertragen, andernfalls fortgelassen.
Solche S-Invarianten lassen sich logisch als Repräsentationen von Zirkelschlüssen interpretieren; vgl. Fidelak (1986b), S. 37. Somit werden durch die o.a. einschränkende Bedingung des Netztheorems alle T-Invarianten ausgeschlossen, die auf die Reproduzierung der Nullmarkierung infolge von netztheoretisch abgebildeten Zirkelschlüssen zurückgeführt werden können.

55) Zu diesem netztheoretischen Invariantentheorem äquivalent ist das Korollar: Das Netzmodell repräsentiert ein konsistentes Aussagensystem genau dann, wenn für das Gleichungssystem GS keine semipositive T-Invariante existiert oder wenn es mindestens eine nicht-triviale S-Invariante für das Subnetz besitzt, das von einer solchen T-Invariante aufgespannt wird.

56) Die Menge der ganzen Zahlen wird fortan mit Z bezeichnet.

ligen Gleichungssystems HGS: $\underline{C} \cdot \underline{t} = \underline{0}$ stellt eine semi-positive T-Invariante dar[57].

Eine S-Invariante des Gleichungssystems GS ist ein ganzzahliger Spaltenvektor $\underline{s} \in Z^n$, der komplementär zur T-Invariante festgelegt wird durch:

$$\underline{s}^T \cdot \underline{C} = \underline{0}^T$$

Eine S-Invariante gilt als trivial, wenn sie aus dem Nullvektor $\underline{0}$ besteht, da dieser die o.a. Definitionsgleichung immer erfüllt.

Für die Ermittlung der o.a. Lösungen von homogenen, linear-ganzzahligen Gleichungssystemen kann auf allgemeine algebraische Lösungsalgorithmen zurückgegriffen werden. Ebenso stehen mehrere Softwarepakete zur Verfügung, die speziell auf die Analyse von Petrinetzen zugeschnitten sind und zumeist die Invariantenberechnung für Stelle/Transition-Netze als Standardkomponente umfassen[58]. Insbesondere ist auf die jüngst veröffentlichte Dissertation von Pascoletti[59] hinzuweisen. Es werden zwei Methoden zur Untersuchung der T- und S-Invarianten von Stelle/Transition-Netzen entwickelt, die es erstmals gestatten, die Menge der "einfachen" Invarianten vollständig zu ermitteln. Jede Invariante kann aus solchen einfachen Invarianten als deren Linearkombination erzeugt werden.

Die Bestimmung der Lösungen des Gleichungssystems HGS bedeutet die algebraische Überprüfung, ob das Aussagesystem inkonsistent (widersprüchlich) ist, das problemrelevante logische Sachverhalte beschreibt und mit der Hilfe eines Stelle/Transition-Netzes modelliert

---

57) Sofern Mißverständnisse ausgeschlossen sind, werden solche Lösungen fortan ohne die charakterisierenden Attribute vereinfachend als Lösungen des Gleichungssystems HGS oder T-Invarianten bezeichnet.

58) Vgl. die Auflistung solcher Softwarepakete und ihrer Leistungsumfänge bei Feldbrugge (1986), S. 211ff.
Neben diesen Softwarepaketen, die auf der Anwendung von konventionellen sequentiellen Algorithmen beruhen, werden neuerdings auch parallele Algorithmen diskutiert, die speziell zur Berechnung der T-Invarianten von Petrinetzen entwickelt wurden; vgl. zum Vorschlag eines solchen parallelen Konzepts Zelewski (1986b), S. 36ff.

59) Vgl. Pascoletti (1985), S. 119ff. i.V.m. S. 105ff.

wurde. Mit Hilfe der Petrinetz-Theorie wird die logische auf eine algebraische Problemanalyse reduziert.

Diese Reduzierung erfüllt die o.a. Anforderung der Programmierbarkeit. Denn die Ableitung eines Netzmodells aus einer logischen Problembeschreibung unterliegt einem einfachen Schema, das ohne Schwierigkeiten als Konstruktionsalgorithmus implementiert werden kann. Für die nachfolgende Invariantenanalyse liegen die entsprechenden Ermittlungsalgorithmen bereits vor.

Als Exkurs wird kurz auf die Bedeutung des von Lautenbach aufgestellten Netztheorems hingewiesen. Es stellt eine tiefliegende Korrespondenz zwischen der logischen Beweismethode des Resolutionskonzepts[60)] einerseits und den Lösungen linearer Gleichnungssysteme anderseits her. Das Resolutionskonzept findet - vor allem auch seitens der Erforschung der Künstlichen Intelligenz - besondere Beachtung, weil es einen der ersten rein syntaktischen ("formalen") Ansätze zum Beweis der Gültigkeit von logischen Formeln darstellt.

Ein Charakteristikum des Resolutionskonzepts liegt in seinem Refutationsprinzip. Mit seiner Hilfe kann nicht direkt die Gültigkeit einer Formel bewiesen werden, sondern nur indirekt die Inkonsistenz des kontradiktorischen Gegenteils der zu beweisenden Formel. Gelingt es, diese Inkonsistenz im Rahmen eines vorgegebenen Systems von Axiomen, deren Gültigkeit vorausgesetzt wird, abzuleiten, muß die ursprüngliche Formel[61)] widerspruchsfrei mit dem Axiomensystem vereinbart werden können und somit - in bezug auf diese Axiome - gültig sein.

Auf der Grundlage des Resolutionskonzepts wurde eine Vielzahl von Algorithmen zur automatischen Deduktion implementiert, die im Regelfall auf einer Lösungssuche in vielfach verzweigten logischen Bäumen beruhen. Mit der Hilfe des Netztheorems von Lautenbach wurde eine lineare algebraische Struktur aufgezeigt, die dieser

---

60) Vgl. Robinson (1965), S. 23ff.; Bibel (1982), S. 119ff.

61) Dies gilt als Folge der Dichotomie der Wahrheitswerte von Aussagen- und Prädikatenlogik oder - inhaltlich äquivalent - aufgrund des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten.

Lösungssuche zugrundeliegt. Es bleibt abzuwarten, ob diese Erkenntnis zukünftig das Feld der automatischen Theorembeweiser derart zu befruchten vermag, daß Lösungsalgorithmen für linear-ganzzahlige, homogene Gleichungssysteme mit den o.a. baumorientierten Suchalgorithmen in effizienzsteigernder Weise kombiniert werden[62].

---

62) Ein netzfundierter Beitrag zur Gestaltung von Deduktionsautomaten könnte z.B. darin liegen, prädikatenlogische Formeln auf Prädikat/Transition-Netze abzubilden, sofern diese Netze endlich bleiben. Nachdem die endlichen Prädikat/Transition-Netze zu Stelle/Transition-Netzen entfaltet worden sind, läßt sich auf die Pascoletti-Algorithmen zurückgreifen, um die Gesamtheit aller T-Invarianten (und der zugehörigen S-Invarianten) zu bestimmen. Diese könnten benutzt werden, um alle inkonsistenten Belegungen der Variablen der betrachteten Formeln durch Individuen zu identifizieren. In dieser Vollständigkeit liegt ein Vorzug gegenüber den meisten Anwendungen des Resolutionskonzepts, die nur eine einzige inkonsistente Individuen-Belegung ermitteln.
Eine Alternative bestände darin, auf die parallelen Algorithmen zur T-Invarianten-Ermittlung zu rekurrieren, die in Fußnote 58) angesprochen wurden. Da einerseits der Existenznachweis von T-(und S-)Invarianten in Netzmodellen dem Inkonsistenznachweis des Resolutionskonzepts entspricht und anderseits die Programmiersprache PROLOG, die vornehmlich seitens der Künstlichen Intelligenz-Forschung eingesetzt wird, auf dem Resolutionskonzept beruht, könnten solche parallelen Netzalgorithmen herangezogen werden, um parallele PROLOG-Implementierungen zu verwirklichen. Für parallel arbeitende PROLOG-Übersetzer bestehen zwar schon einige Vorschläge - vgl. z.B. Onai (1985), S. 198ff.; Westphal (1986), S. 234ff. -, doch ist die Entwicklung diesbezüglich noch nicht konsolidiert, da die meisten ausgereiften Übersetzer zur Zeit sequentiell strukturiert sind.
Lautenbach (1985), S. 2 u. 32, stellt die Brückenfunktion der Petrinetz-Theorie heraus. Das o.a. Netztheorem vermittelt zwischen Künstlicher Intelligenz-Forschung (Deduktionsautomaten) und Operations Research (Lösungsalgorithmen für linear-ganzzahlige, homogene Gleichungssysteme); vgl. die plastischen Ausführungen zur Wissenserschließung durch Anwendung der Invariantenanalyse auf der Basis des Netztheorems bei Fidelak (1986a), S. 20ff. Vgl. auch die von Mainz (1984), S. 102ff., insbesondere S. 110ff., skizzierte Möglichkeit, Abfragen in relationalen Datenbanksystemen durch eine netztheoretisch fundierte Resolutionsprozedur zu beantworten, die strukturell der Anwendung des Netztheorems auf Prädikat/Transition-Netze entspricht.

3.2 Anwendung von Netzmodellen zur Ermittlung von Problemlösungen

3.2.1 Zusammenhang von Netzmodellen und Problemlösungen

Die Interpretation der Ergebnisse von Versuchen, das Gleichungssystem HGS zu lösen, bedarf näherer Erläuterungen, weil die grundsätzliche Strategie des Inkonsistenznachweises auf den ersten Blick befremdet. Denn primär wird nicht das Aufzeigen von Widersprüchen innerhalb einer logischen (partiellen) Problembeschreibung intendiert, sondern die Identifizierung solcher Problemlösungen, welche die logisch beschriebenen Sachverhalte erfüllen.

Daher ist von einer problemadäquaten Repräsentation logischer Sachverhalte, die durch die oben dargelegte Konstruktion von Netzmodellen geleistet wird, zu einer lösungsadäquaten Modellierung überzugehen, die gestattet, die gesuchten Problemlösungen zu ermitteln. Hierzu muß das Konzept der Netzmodelle erweitert werden.

Ausgangspunkt ist ein Aussagesystem, das die logischen Sachverhalte beschreibt, die von zulässigen Problemlösungen erfüllt werden müssen. Dieses Aussagesystem wird als eine einzige zusammengesetzte Aussage A in konjunktiver Normalform aufgefaßt. Es besteht aus m Teilaussagen A_i (mit $i = 1,...,m$), die jeweils Klauseln darstellen und miteinander konjunktiv verknüpft sind[63]. Jede Klausel ist per definitionem aus n Literalen L_j ($j = 1,...,n$) zusamengesetzt.

Das Stelle/Transition-Netz STN_A, das mit der Hilfe der oben beschriebenen Konstruktionsregeln dem Aussagensystem A zugeordnet wird, repräsentiert mit jeder Transition t_i eine Klausel und mit jeder Stelle s_j ein

63) Gewöhnlich werden die Klauseln als ungeordnete Klauselmenge oder als lineare Liste angeführt. Dem liegt stets eine implizite konjunktive Klauselverknüpfung zugrunde.

Literal L_j des Aussagesystems A[64]. Diese netztheoretische Darstellung bedeutet eine rein syntaktische Wiedergabe des Aussagesystems, weil es keine Metaaussage[65] über die Wahrheitswerte des repräsentierten Aus-

---

64) Es wird fortan unterstellt, daß das Aussagesystem A zu jeder atomaren Aussage auch deren Negat umfaßt und umgekehrt. Die resultierenden n Literale L_j werden so indiziert, daß die erste Hälfte der Literale nur atomare Aussagen $L_j=AA_j$ ($j = 1,...,1/2n$) darstellen, während die zweite Hälfte der Literale die jeweils korrespondierenden Negate $L_{j+1/2n}=\neg AA_j$ ($j = 1,...,1/2n$) bedeuten. Wenn diese Voraussetzung durch die ursprüngliche Beschreibung der problemrelevanten logischen Sachverhalte nicht erfüllt wird, ist die jeweils fehlende komplementäre Aussage zu ergänzen. Der Grund für diese Komplettierung liegt in der o.a. Eigenschaft der Resolutionsmethode, nur Inkonsistenzen von Formelmengen nachzuweisen, und an der strukturellen Äquivalenz von der netztheoretischen Invariantenermittlung einerseits sowie der Anwendung der Resolutionsmethode anderseits. Denn aus dem Ergebnis einer Invariantenanalyse oder einer Resolutionsprozedur, daß die Annahme der Wahrheit einer (atomaren) Aussage - in Verbindung mit der gleichen Wahrheitsunterstellung für die anderen involvierten Aussagen - zu keiner Inkonsistenz führt, kann nicht gefolgert werden, daß die Annahme der Falschheit dieser Aussage notwendig einen Widerspruch verursachen würde. Vielmehr kann auch der Fall vorliegen, daß der Wahrheitswert der betrachteten Aussage für die (In-)Konsistenz der betroffenen Aussagen-Menge irrelevant ist. Beispielsweise ist die Menge der (konjunktiv verknüpften) Aussagen {A->B,A,B,C} konsistent für wahre Aussagen A->B, A und B, und zwar unabhängig vom Wahrheitswert für die Aussage C. Die Anwendung der Invariantenanalyse oder der Resolutionsmethode auf diese Aussagenmenge würde scheitern, d.h. mit dem Nachweis der Nichtexistenz von T-Invarianten bzw. mit der Unmöglichkeit des Inkonsistenznachweises enden. Es wäre jedoch fehlerhaft, hier auf die Wahrheit der Aussage C zu schließen. Denn ebenso könnte die Aussagenmenge {A->B,A,B,¬C} betrachtet werden. Auch sie würde die Invariantenanalyse und die Resolutionsmethode scheitern lassen. Folglich kann mit der Wahrheit der ersten drei Aussagen sowohl die Wahrheit von Aussage C als auch die Wahrheit ihres Negats ¬C - also die Falschheit der Aussage C - widerspruchsfrei vereinbart werden. Daher muß für die Erkenntnis aller zulässigen Problemlösungen, die nachfolgend auf die Korrespondenz mit der Wahrheit von Literalen aus der logischen Problembeschreibung zurückgeführt wird, zu jeder atomaren Aussage (zu jedem Negat einer atomaren Aussage) auch deren Negat (die zugrundeliegende atomare Aussage) explizit berücksichtigt werden.

65) Das Aussagesystem und seine Teilaussagen stellen jeweils Objektaussagen dar, auf das sich Metaaussagen über deren Wahrheitswerte beziehen.

sagesystems A und seiner Teilaussagen A_i sowie L_j enthält.

Für die intendierten Problemlösungen ist dagegen die Metaausage bekannt, daß sie das Aussagesystem A erfüllen müssen, d.h. die zusammengesetzte Aussage A muß - bezogen auf einen Lösungsvektor $\underline{x}$ des Rumpfmodells - wahr sein. Unter dem Rumpfmodell wird hier das ursprüngliche Entscheidungsmodell ohne Berücksichtigung der logischen Sachverhalte verstanden, die im separaten Netzmodell abgebildet werden. Um eine solche Metaausage feststellen oder verwerfen zu können, ist es erforderlich, einerseits das zunächst rein syntaktisch definierte Netzmodell STN_A durch eine Semantik zu erweitern und anderseits Korrespondenzen zwischen Lösungsvektoren $\underline{x}$ des Rumpfmodells und Wahrheitswerten von Aussagen im Netzmodell zu definieren.

3.2.2 Semantik von Netzmodellen

Die Semantik des Netzmodells STN_A wird durch das hieraus abgeleitete Gleichungssystem HGS: $\underline{C} \cdot \underline{t} = \underline{0}$ und dessen T-Invarianten $\underline{t}$ festgelegt. Wenn eine T-Invariante existiert, stellt sie einen Schaltvektor $\underline{t}^T = (ta_1,...,ta_m)$ dar, der in seiner i-ten Komponente ta_i $(i = 1,...m)$ angibt, wie oft die Transition t_i im zugrundeliegenden Netz STN_A geschaltet werden muß, um - in Verbindung mit dem Schalten der übrigen Transitionen - die Nullmarkierung zu reproduzieren. Es wurde oben gezeigt, daß diese Reproduktion der Nullmarkierung äquivalent mit der Anwendung der Resolutionsmethode ist, die zum Nachweis einer Inkonsistenz führt. Jedes Schalten der Transition t_i bedeutet, daß bei diesem Nachweis auf die Wahrheit der Klausel A_i, welche durch die Transition t_i im Netzmodell repräsentiert wird, zurückgegriffen wurde. Mehrmaliges Schalten der Transition kann deswegen nicht als "mehrfache Wahrheit" der dargestellten Klausel, sondern nur als mehrfacher Rekurs auf deren Wahrheit während der Resolutionsprozedur interpretiert werden.

Wenn eine T-Invariante $\underline{t}$ existiert, bedeutet dies die Inkonsistenz des Aussagesystems A, das vom Netzmodell STN_A repräsentiert wird. Durch die Interpretation der Invariante als Schaltvektor $\underline{t}$, der die Häufigkeit der Bezugnahme auf die Wahrheit von Klauseln beim Inkonsistenznachweis angibt, läßt sich leicht ableiten, welche Klauseln die Inkonsistenz des Aussagesystems A verursachen. Es handelt sich genau um die Klauseln A_i, deren zugeordneten Transitionen im Netz STN_A unter der Invariante $\underline{t}$ gemäß $ta_i \geqslant 1$ mindestens einmal geschaltet werden. Daher muß folgende Menge von - implizit konjunktiv verknüpften - Klauseln inkonsistent sein:

$$IK(\underline{t}) = \{A_i \mid i=1,\dots,m \wedge ta_i \geqslant 1 \text{ für } \underline{C} \cdot \underline{t} = \underline{0} \wedge ta_i \in \underline{t}\}$$

Die Menge aller Transitionen, die unter der Invariante $\underline{t}$ mindestens einmal geschaltet werden, wird als Schaltbasis $SB(\underline{t})$[66] bezeichnet:

$$SB(\underline{t}) = \{t_i \mid i=1,\dots,m \wedge ta_i \geqslant 1 \text{ für } \underline{C} \cdot \underline{t} = \underline{0} \wedge ta_i \in \underline{t}\}$$

Hiermit läßt sich die inkonsistenzverursachende Klauselmenge - kurz: Inkonsistenzmenge - auch ausdrücken als:

$$IK(\underline{t}) = \{A_i \mid i=1,\dots,m \wedge t_i \in SB(\underline{t})\}$$

Der Nachweis der Existenz einer nicht-leeren Inkonsistenzmenge $IK(\underline{t})$ bedeutet hinsichtlich der logischen Sachverhalte, die vom Netzmodell STN_A repräsentiert werden, daß es widersprüchlich ist, die Wahrheit aller Aussagen $A_i \in IK(\underline{t})$ anzunehmen. Eine zulässige Problemlösung, die stets als logisch konsistent vorausgesetzt wird, kann also nur dadurch erreicht werden, daß die nachgewiesene Inkonsistenz vermieden wird. Dies ist genau dann der Fall, wenn für die Problemlösung nicht alle Aussagen der Inkonsistenzmenge wahr sind. Dieser Sachverhalt wird nachfolgend präzisiert und - hinsichtlich der relevanten unwahren Aussagen - verschärft.

Die Existenz der Inkonsistenzmenge $IK(\underline{t})$ ist per definitionem äquivalent mit der Wahrheit der Aussage $A(\underline{t}) = A_{r(1)} \wedge \dots \wedge A_{r(q)}$, wobei $A_h = A_{r(k)} \in IK(\underline{t})$ für alle $k = 1,\dots,q$ gelten muß mit q als der Mächtigkeit der

66) Die Schaltbasis liegt der o.a. Konstruktion des Subnetzes $S\text{-}STN(\underline{t})$ zugrunde, das von der T-Invariante $\underline{t}$ aufgespannt wird.

Inkonsistenzmenge IK($\underline{t}$). Die Inkonsistenz des repräsentierten Aussagesystems A bezüglich der Klauselmenge IK($\underline{t}$) wird durch die Negation der inkonsistenten Aussage A($\underline{t}$) aufgelöst. Demzufolge ist eine Problemlösung genau dann zulässig, wenn die Objektaussage NA($\underline{t}$) = $\neg A(\underline{t}) = \neg A_{r(1)} \vee \ldots \vee \neg A_{r(q)}$ wahr ist.

Die Metaaussage hinsichtlich der Wahrheit von NA($\underline{t}$) läßt sich vereinfachen, wenn vorausgesetzt wird, daß die Beschreibung der zu erfüllenden logischen Sachverhalte - bis auf faktische Feststellungen - ursprünglich korrekt erfolgte. Dies bedeutet, daß alle zusammengesetzten Aussagen $A_{r(k)}$ in der Aussage NA($\underline{t}$), die nichtatomare[67] Klauseln darstellen, als wahr unterstellt werden dürfen[68]. Unter dieser Korrektheitsprämisse, die fortan angenommen wird, müssen die Negate $\neg A_{r(k)}$ aller nicht-atomaren Klauseln $A_{r(k)}$ falsch sein. Folglich kann die intendierte Wahrheit der Aussage NA($\underline{t}$) nur dadurch realisiert werden, daß mindestens eine atomare Klausel $A_{r(k)}$, die per definitionem ein Literal (oder "Faktum") darstellt, aus NA($\underline{t}$) falsch ist[69]. Dies ist äquivalent mit der metasprachlichen Aussage, daß das Negat $\neg A_{r(k)}$ von mindestens einer atomaren Klausel in der Objektaussage NA($\underline{t}$) wahr sein muß.

Dieses Ergebnis läßt sich auf die Inkonsistenzmenge IK($\underline{t}$) zurückübertragen. Unter der Korrektheitsprämisse ist die Aussage A($\underline{t}$) wahr und somit die zugehörige Klauselmenge IK($\underline{t}$) genau dann inkonsistent, wenn keines

---

67) Eine atomare Klausel ist eine Klausel, die aus genau einem Literal besteht, also entweder aus einer atomaren Aussage oder deren Negat.

68) Dies umschließt insbesondere die Prämisse, daß alle Regeln, die ursprünglich zur Beschreibung der relevanten logischen Sachverhalte aufgestellt wurden, als wahr gelten.

69) Unter der Korrektheitsprämisse können keine inkonsistenten Klauselmengen existieren, die keine atomare Klausel enthalten. Sollte eine T-Invariante $\underline{t}$ ermittelt werden, deren zugehörige Inkonsistenzmenge IK($\underline{t}$) keine atomaren Klauseln enthält, so zeigt dies eine Verletzung der Korrektheitsprämisse an: Mindestens eine nicht-atomare Klausel, etwa eine Regel zur Beschreibung eines logischen Sachverhalts, wurde bei der Modellierung der logischen Problemaspekte fehlerhaft gebildet, oder das zugrundeliegende Realproblem ist infolge widersprüchlicher logischer Anforderungen in sich inkonsistent.

der Negate $\neg A_{r(k)}$ von atomaren Klauseln $A_{r(k)} \in IK(\underline{t})$ wahr ist, d.h. wenn alle atomaren Klauseln $A_{r(k)}$ aus der Inkonsistenzmenge $IK(\underline{t})$ wahr sind. Daher kann die Inkonsistenzmenge reduziert werden auf die Betrachtung der Menge $RIK(\underline{t})$ aller atomaren Klauseln (Literale), die in der Inkonsistenzmenge enthalten sind.

Folglich ist das Aussagesystem A bezüglich der T-Invarianten $\underline{t}$ unter der Korrektheitsprämisse für alle nicht-atomaren Klauseln genau dann inkonsistent, wenn alle atomaren Klauseln aus der reduzierten Inkonsistenzmenge $RIK(\underline{t}) = \{A_{r(k)} \mid A_{r(k)} \in IK(\underline{t}) \wedge A_{r(k)} \text{ atomar}\}$ wahr sind. Demzufolge ist eine Problemlösung bezüglich einer T-Invariante $\underline{t}$ unzulässig, wenn gezeigt werden kann, daß für sie alle atomaren Klauseln aus der reduzierten Inkonsistenzmenge $RIK(\underline{t})$ wahr sind. Da für das Netzmodell STN_A mehrere T-Invarianten $\underline{t}$ - und somit auch mehrere reduzierte Inkonsistenzmengen $RIK(\underline{t})$ - existieren können, ist eine Problemlösung nur dann zulässig, wenn sie hinsichtlich keiner T-Invariante unzulässig ist.

Auf die Verwendung dieser reduzierten Inkonsistenzmengen für die konkrete Ermittlung von Problemlösungen wird weiter unten zurückgekommen, wenn die Korrespondenzregeln für atomare Klauseln (Literale) festgelegt sind. Denn eine solche Korrespondenz zwischen Problemlösungen und Wahrheitswerten von atomaren Klauseln wurde in der voranstehenden Argumentation implizit vorausgesetzt.

3.2.3 Korrespondenzen zwischen Netz- und Rumpfmodellen

Die Korrespondenzen zwischen Rumpf- und Entscheidungsmodell können leicht definiert werden, wenn die Wahrheit eines Literals (einer atomaren Klausel) L_j der Erfüllung eines Ungleichungssystems[70] US_j: $\underline{A}_j \cdot \underline{x} \leq \underline{b}_j$ durch den Lösungsvektor $\underline{x}$ entspricht. Dann gilt als Korrespondenzregel: "Das Literal L_j ist genau dann wahr, wenn der Lösungsvektor $\underline{x}$ das Ungleichungssystem US_j durch $\underline{A}_j \cdot \underline{x} \leq \underline{b}_j$ erfüllt". Das Ungleichungssystem US_j kann ohne Schwierigkeiten in das algebraische Programm integriert werden, welches das Rumpfmodell ohne logische Sachverhalte bildet.

Es wird vorausgesetzt, daß für alle Literale Korrespondenzregeln in der o.a. Weise aufgestellt werden können. Hierin liegt eine wesentliche Einschränkung des vorgestellten Ansatzes. Denn Aussagen, welche die Auswahl einer bestimmten oder einer beschränkten Anzahl von Objekten aus einer endlichen Objektmenge betreffen[71], lassen sich auf diese Weise nicht berücksichtigen. Zu solchen Aussagen zählen z.B. die Ausschließlichkeits- und Vollständigkeitsaussagen von Zuordnungsproblemen, die ausdrücken, daß bestimmte Objekte nicht zugleich oder nicht mehrfach zugeordnet werden dürfen bzw. jedes Objekt (mindestens) einmal zugeordnet werden muß. Wenn für Aussagen dieser Art Korrespondenzregeln gebildet werden sollen, muß auf prädikatenlogische Formulierungen und komplexere Prädikat/Transition-Netze zurückgegriffen werden[72]. Da aber die Prädika-

---

70) In den meisten Fällen reicht die Betrachtung einer Ungleichung aus. Denn Aussagen, deren Wahrheit der Erfüllung mehrerer Ungleichungen entspricht, können stets als Zusammensetzungen von konjunktiv verknüpften Literalen aufgefaßt werden, deren Wahrheit jeweils mit der Erfüllung von nur einer Ungleichung korrespondiert. Dennoch werden hier Ungleichungssysteme zugelassen, um auch den Sonderfall zu umfassen, daß die Wahrheit einer atomaren Aussage der Erfüllung einer Gleichung entspricht. Denn eine Gleichung wird in algebraischen Programmen des Operations Research zumeist als System aus zwei Ungleichungen dargestellt.

71) Mit Aussagen dieser Art setzt sich intensiv Gabriel (1982), S. 44ff., auseinander.

72) Vgl. zu deren Anwendung die Anmerkungen auf S. 15f. und in Fußnote 28).

tenlogik durch ihre Existenz- und Allquantoren Quantifizierungen über Objektmengen nur in der Weise zuläßt, daß durch mindestens ein Objekt- bzw. durch alle Objekte eine bestimmte Eigenschaft (Beziehung) erfüllt wird, bleibt auch dieses erweiterte Formulierungspotential für Korrespondenzregeln unbefriedigend.

Daher ist die netztheoretisch fundierte Modellierung von logischen Sachverhalten, deren Einhaltung in einer Problembeschreibung von zulässigen Problemlösungen gefordert wird, grundsätzlich auf den Fall beschränkt, in dem die Wahrheit aller Literale, also aller atomaren Aussagen und ihrer Negate - mit der Erfüllung von Ungleichungssystemen korrespondiert. Das Leistungspotential der Netzmodelle liegt dann in der Repräsentation und der - nachfolgend näher erörterten - Auswertung der zusammengesetzten Aussagen.

Andernfalls[73)] muß entweder auf die Verwendung von Netzmodellen verzichtet werden. Oder es werden den Literalen, deren Wahrheitswerte nicht durch einfach zu handhabende Korrespondenzregeln an die Erfüllung von Ungleichungssystemen gebunden werden können, komplexere algebraische Ausdrücke zugeordnet, wie sie bei der konventionellen Methode, separate Logikvariablen einzuführen, gebildet werden[74)]. Bei der letztgenannten Alternative erfolgt eine gemischte Vorgehensweise. Im Hinblick auf Literale (atomare Klauseln) werden die - eingangs als "artifiziell" kritisierten - Konstruktionen aus Logikvariablen verwendet. Bezüglich zusammengesetzter Klauseln wird weiterhin die Natürlichkeit und Übersichtlichkeit der netztheoretischen Abbildung logischer Sachverhalte genutzt. Dieser zweistufige Ansatz bietet den Vorzug, Logikvariablen dort einzusetzen, wo sie noch auf relativ einfache Konstruktionen beschränkt werden können, da sie nur für die Korrespondenzregeln von Literalen dienen. Zugleich gewähren Netzmodelle auf der zweiten Stufe eine Repräsentation der zusammenge-

73) Fortan wird von den wenigen Ausnahmen abgesehen, daß die Heranziehung von prädikatenlogischen Formeln und Prädikat/Transition-Netzen zu einfachen Korrespondenzregeln führt. In diesen Fällen kann weiterhin an der voranstehenden Anwendung von Netzmodellen festgehalten werden.

74) Vgl. z.B. Gabriel (1982), S. 44ff.

setzten Klauseln, die im Regelfall kompakter und transparenter ausfällt als die fortgesetzte Anwendung von Logikvariablen.

3.2.4 Ermittlung zulässiger Problemlösungen

Fortan wird vorausgesetzt, daß für alle Literale L_j entsprechende Korrespondenzregeln mit zugehörigen Ungleichungssystemen US_j definiert werden konnten. Auf dieser Grundlage erfolgt die Auswertung des Netzmodells STN_A zur Ermittlung von zulässigen Lösungen $\underline{x}$ des - ursprünglich gegebenen - Gesamtmodells. Diese Problemlösungen müssen nicht nur das Ungleichungssystem US erfüllen, das den Alternativenraum des Rumpfmodells konstituiert, sondern auch die problemrelevanten logischen Sachverhalte, die im Aussagensystem A zusammengefaßt sind.

Betrachtet wird zunächst der Alternativenraum des zu lösenden Entscheidungsmodells, der durch die Definitionsbereiche der Entscheidungsvariablen aufgespannt und durch das Ungleichungssystem US eingeschränkt wird. Dieser Alternativenraum berücksichtigt noch nicht die logischen Sachverhalte der Problembeschreibung. Zu deren Beachtung werden die T-Invarianten des korrespondierenden Netzmodells berechnet[75]. Jede T-Invariante $\underline{t}$ führt zu einer reduzierten Inkonsistenzmenge RIK($\underline{t}$) von atomaren Klauseln (Literalen) $L_j=A_{r(k)}$, denen durch die Korrespondenzregeln jeweils ein Ungleichungssystem US_j zugeordnet ist. Eine Problemlösung $\underline{x}$ ist unzulässig, wenn für sie alle atomaren Klauseln einer reduzierten Inkonsistenzmenge RIK($\underline{t}$) wahr sind. Dies entspricht - via Korrespondenzregeln - dem Sachverhalt, daß eine Problemlösung $\underline{x}$ unzulässig ist, wenn sie die Ungleichungssysteme US_j aller $L_j \in$RIK($\underline{t}$) erfüllt. Folglich sind alle Lösungen im Alternativenraum auszuschließen, die durch die Erfüllung der Ungleichungssysteme US_j für jedes $L_j \in$RIK($\underline{t}$) gebildet werden.

75) Es wird unterstellt, daß für das Subnetz, das von einer T-Invariante aufgespannt wird, keine S-Invariante existiert.

Es resultiert eine "Blase" unzulässiger Lösungen im Alternativenraum als Abbildung der T-Invariante $\underline{t}$ des Netzmodells auf das algebraische Programm des Rumpfmodells. Für jede T-Invariante ist ein entsprechender Bereich logisch unzulässiger Lösungen durch die Analyse der zugehörigen Ungleichungssysteme US_j aus dem Alternativenraum auszugrenzen. Wenn für das Netzmodell keine T-Invarianten existieren, erfolgt keine solche Einschränkung des Raums zulässiger Lösungen. Dann sind alle Lösungen des Rumpfmodells zugleich auch logisch zulässig, weil keine denkmögliche Lösung existiert, die mindestens einen logischen Sachverhalt verletzen würde. Die Beschreibung problemrelevanter logischer Sachverhalte ist in diesem Fall bezüglich des Ungleichungssystems US redundant.

Das Ergebnis dieser Integration der algebraischen Auswertung des Netzmodells in das algebraische Rumpfmodell ist ein "durchlöcherter" Alternativenraum. Da dieser Alternativenraum die Erfüllung aller logischen Sachverhalte per constructionem gewährleistet, stellt jeder Vektor $\underline{x}$ aus diesem Alternativenraum eine zulässige Problemlösung unter Berücksichtigung aller logisch formulierten Problemaspekte dar.

Der Vorzug dieser netztheoretisch fundierten Vorgehensweise besteht - unter den oben erörterten Vorbehalten[76] - darin, daß der Alternativenraum um keine Logikvariablen erweitert wird, deren Ganzzahligkeitsbedingungen hinsichtlich der Effizienz von Lösungsalgorithmen problematisch erscheinen. Es brauchen nur die Entscheidungsvariablen untersucht zu werden. Anstelle der Einführung von Logikvariablen wird jedoch der Alternativenraum durch die Ergänzung von Ungleichungssystemen US_j, die von zulässigen Problemlösungen nicht erfüllt werden dürfen, in seinem Zusammenhang zerstört. Dies hat als bedeutsame Konsequenz zur Folge, daß konventionelle Lösungsalgorithmen des Operations Research, die zumeist die Konvexität des Raums zulässiger Lösungen voraussetzen, nicht mehr angewendet werden können. Wenn für das Rumpfmodell diese Eigenschaften des Alternativenraums erfüllt waren, bedeutet dieser Konvexi-

76) Vgl. S. 28ff.

tätsverlust eine wesentliche Beeinträchtigung der Lösungsfreundlichkeit. Allerdings hätten die Ganzzahligkeitsbedingungen für Logikvariablen, die alternativ hätten eingeführt werden müßten, diese Eigenschaften für den Alternativenraum, der um die Dimensionen dieser Variablen erweitert ist, ebenfalls zerstört.

Die Besonderheit des Konvexitätsverlusts eines Rumpfmodells durch die Integration eines Netzmodells liegt darin, daß das resultierende Gesamtmodell nicht mehr - wie bei den algebraischen Programmen des Operations Research üblich - durch ein System aus konjunktiv verknüpften Ungleichungen beschrieben werden kann, die durch jede zulässige Problemlösung erfüllt werden müssen. Zwar sind die Bereiche unzulässiger Lösungen, die durch die Ungleichungssysteme US_j definiert werden, mit dem Ungleichungssytem US des Rumpfmodells konjunktiv verknüpft. Doch darf keines der Ungleichungssysteme US_j von einer zulässigen Lösung erfüllt werden, während das Ungleichungssystem US von jeder zulässigen Lösung erfüllt werden muß. Dieses Nebeneinander von nicht zu erfüllenden und zu erfüllenden Ungleichungen[77] erschwert die Anwendung konventioneller Lösungsalgorithmen des Operations Research erheblich.

Allerdings können die Ungleichungssysteme des resultierenden Gesamtmodells grundsätzlich gelöst werden. Hierzu kommen z.B. die Varianten der Gradientenmethode[78] in Betracht, sofern diese in der nachfolgend skizzierten Weise erweitert wird. Die Anwendungsmöglichkeit der Gradientenmethode wird hier auf den Fall beschränkt, daß im Rumpfmodell das Zielsystem, das über

---

77) Dieses Nebeneinander kann auch nicht dadurch aufgelöst werden, daß die nicht zu erfüllenden Ungleichungen der Systeme US_j in ihre kontradiktorischen Gegenteile durch Umkehrung der Ungleichungsrelationen transformiert werden. Denn nach den logischen de Morgan-Gesetzen würden zugleich die konjunktiv verknüpften Ungleichungen desselben Ungleichungssystems US_j in einen adjunktiven Zusammenhang überführt. Damit wären zwar die Negations-Operatoren eliminiert, aber das Gesamtmodell ließe sich nicht mehr als ein System von konjunktiv verknüpften Ungleichungen darstellen. Es entstünden analoge Lösungsschwierigkeiten.

78) Vgl. Ellinger (1985), S. 218ff.

dem Alternativenraum aufgespannt ist, unimodularen Charakter besitzt[79].

Dann kann die Lösung des Gesamtmodells mit der bestmöglichen Erfüllung des Zielsystems durch zufälliges Generieren einer beliebigen Ausgangslösung (approximativ)[80] aufgefunden werden. Wenn diese Ausgangslösung unzulässig ist, weil sie mindestens eines der Ungleichungssysteme US_j verletzt, wird eine neue Ausgangslösung erzeugt usw., bis eine erste zulässige Problemlösung als Startpunkt der Suche nach einer (zielsystem-) optimalen Problemlösung im Alternativenraum resultiert.

Von diesem Startpunkt aus wird in der Richtung fortgeschritten, in der - auf der Grundlage des Gradienten des (funktional beschriebenen) Zielsystems - die Erfüllung des Zielsystems maximal erhöht wird. Wenn der Zielpunkt eines solchen Schrittes wieder eine zulässige Lösung darstellt, wird der Zielpunkt als neuer Startpunkt gesetzt und das zuvor beschriebene Fortschreiten wiederholt. Das Fortschreiten wird abgebrochen, wenn der Erreichungsgrad des Zielsystems in keiner Richtung verbessert werden kann und somit die gesuchte optimale Problemlösung aufgefunden ist.

Wenn während dieses Suchprozesses der Zielpunkt eines Schrittes unzulässig ist, weil er das Ungleichungssystem US des Rumpfmodells verletzt, wird eine Modifizierung des Zielpunktes vorgenommen. Sie wird durch die Varianten der Gradientenmethode für konvexe Optimierungsmodelle in jeweils spezifischer Weise bestimmt. Falls die Unzulässigkeit dadurch verursacht wird, daß der Zielpunkt gegen mindestens eines der Un-

---

79) Nur unter dieser Voraussetzung kann die Gradientenmethode auf das Rumpfmodell ohne Schwierigkeiten angewendet werden. Bei Multimodularität wären - etwa nach der Monte Carlo-Methode - mehrere der nachfolgend angeführten zulässigen Ausgangslösungen zu erzeugen, die im Alternativenraum zufällig (gleichmäßig) verteilt sind. Mit zunehmender Anzahl dieser Ausgangslösungen steigt die Wahrscheinlichkeit, daß sich unter den lokal-optimalen Problemlösungen, die von diesen Ausgangslösungen jeweils (approximativ) aufgefunden werden, auch die global-optimale Problemlösung (approximativ) befindet. Diese Erweiterung der Gradientenmethode läßt sich analog auf das Gesamtmodell anwenden.

80) Vgl. Ellinger (1985), S. 219.

gleichungssysteme US_j aus dem Netzmodell verstößt, könnte eine zulässige Lösung mit höherem Erfüllungsgrad des Zielsystems in der ursprünglich eingeschlagenen Fortschrittsrichtung jenseits der "Blase" unzulässiger Lösungen liegen.

Daher ist auf dem Rand dieser "Blase", der durch die Erfüllung der Ungleichungen aus dem verletzten System US_j als Gleichungen definiert wird, so lange fortzuschreiten, bis als neuer Zielpunkt eine zulässige Lösung mit höherem Erfüllungsgrad des Zielsystems resultiert. Dabei ist die Schrittweite möglichst klein zu bemessen, um nicht von einer "Blase" unzulässiger Lösungen in die nächste "Blase" zu springen und hierbei einen Zwischenbereich zulässiger Lösungen zu übersehen. Wenn ein neuer Zielpunkt mit den vorgenannten Eigenschaften gefunden ist, wird die Gradientenmethode wie oben skizziert fortgesetzt. Sofern durch das Fortschreiten auf dem Rand der "Blase" unzulässiger Lösungen an den Ausgangspunkt auf diesem Rand zurückgekehrt wird oder ein Fortschreiten zu keinem Randpunkt mit höherem Erfüllungsgrad des Zielsystems führt, stellt der zuletzt erreichte Punkt auf dem Rand die gesuchte optimale Problemlöung des Gesamtmodells dar. Denn die optimale Lösung des Rumpfmodells muß in diesem Fall im Innern der umwanderten "Blase" liegen.

Die Ermittlung von Logikvariablen-Konstrukten, welche die Erfüllung der problemrelevanten logischen Sachverhalte gewährleisten, bereitet zwar erheblichen Aufwand. Doch muß demgegenüber bei der netztheoretisch fundierten Vorgehensweise berücksichtigt werden, daß erhebliche Ressourcen für die Invariantenanalyse des Netzmodells, die Ableitung von reduzierten Inkonsistenzmengen, die Definition von Korrespondenzregeln für alle Literale und für die Ermittlung aller "Blasen" logisch unzulässiger Lösungen im Alternativenraum benötigt werden.

Aus den voranstehenden Überlegungen kann nicht eindeutig gefolgert werden, ob das netztheoretisch fundierte Konzept für die Erfassung und Auswertung logischer Sachverhaltsbeschreibungen hinsichtlich der Lösungsermittlung leistungsfähiger ist als die Vorgehensweise auf der Basis von Logikvariablen. Die Verwendung von Netzmodellen für die Repräsentation logischer Sachverhalte bedeutet zwar eine höhere Problemadäquanz als der Gebrauch von Logikvariablen, doch läßt sich keineswegs eine größere Lösungsadäquanz erwarten. Der Verf. vermutet infolge der komplexen Alternativenraum-"Durchlöcherung" eher eine deutlich schlechtere Effizienz der Lösungsermittlung auf der Basis von Netzmodellen. Daher bezweckt ihre Vorstellung nur einen explorativen Beitrag zur Problemadäquanz von Darstellungen logischer Sachverhalte in Entscheidungsmodellen, nicht aber die Präsentation einer neuartigen effizienteren Lösungsmethode.

4 Anhang: Exemplarische Modellierung logischer Sachverhalte durch ein Netzmodell

Das problemadäquate Leistungspotential von Netzmodellen hinsichtlich der Darstellung logischer Sachverhalte wird an einem Beispiel der Jahresabschlußgestaltung von Publikumsaktiengesellschaften verdeutlicht, das von Johänntgen-Holthoff mit der Hilfe von Logikvariablen modelliert wurde[81]. Das Entscheidungsmodell erstreckt sich auf die Gestaltung der Bemessungsgrundlage der Körperschaftsteuer unter Berücksichtigung von Verlustvor- und -rückträgen nach § 8 Abs. 4 KStG und Abschn. 37 Abs. 2 KStR i.V.m. § 10d EStG.

Da das Entscheidungsmodell äußerst komplex ausfällt[82], wird es hier nur in demjenigen Ausschnitt reflektiert, der sich auf eine nicht-negative Bemessungsgrundlage der Körperschaftsteuer vor Berücksichtigung eventuell vorgenommener Verlustvor- oder -rückträge bezieht. Hinsichtlich der ausführlicheren materiellen Interpretation der nachfolgend angeführten Variablen und Formeln wird auf die steuerrechtlichen Erläuterungen von Johänntgen-Holthoff verwiesen. Denn hier interes-

81) Vgl. Johänntgen-Holthoff (1986), S. 205ff.
82) Seine Darlegung nimmt im Original immerhin 24 Seiten in straffer Diktion ein!

siert nur der formale Aspekt der - materiell äquivalenten - Transformation von Entscheidungsmodellen, die auf Logikvariablen basieren, in Netzmodelle. Die Benennung, Indizierung und Numerierung[83] von Variablen und Formeln wird aus dem Modell mit Logikvariablen unverändert übernommen[84].

Als Literale L_q (atomare Aussagen A_j) werden von Johänntgen-Holthoff in bezug auf das Referenzjahr t eingeführt[85] und mit korrespondierenden ("<=>") Ungleichungssystemen US_j[86] verknüpft:

(1) $L_1=A_1$: "Es liegt kein körperschaftsteuerrelevanter Verlust ($V_{t/-}$) vor."

<=> US_1 : $V_{t/-} = 0$

(2) $L_2=A_2$: "Der körperschaftsteuerrelevante Gewinn (G_t) ist gleich der Bemessungsgrundlage der Körperschaftsteuer vor der Berücksichtigung von Verlustvor- oder -rückträgen ($G_{t/0}$)."

<=> US_2 : $G_t = G_{t/0}$

83) Wegen der nur partiellen Wiedergabe des Entscheidungsmodells von Johänntgen-Holthoff erweist sich die Formel-Numerierung hier notwendig lückenhaft. Da in der Vorlage nicht alle Formeln mit einer identifizierenden Nummer versehen und bei der späteren Ableitung von Klauseln für das Netzmodell neue Formeln eingeführt werden, erfolgt hier die Ergänzung der Nummern 14 bis 42.

84) Aus drucktechnischen Gründen werden lediglich Superskripte in nachgestellte ("/") Subskripte verwandelt. Das "*"-Symbol kennzeichnet Aussagen, die bei Johänntgen-Holthoff explizit als solche angeführt werden.

85) Da Johänntgen-Holthoff nicht alle inhaltlich verwendeten Aussagen formal durch eigenständige Aussagensymbole bezeichnet, können hier hinter dem Literalsymbol nur zum Teil die entsprechenden Aussagensymbole aus der Vorlage angeführt werden. Einige Literale, die Negate von Aussagen aus dem Entscheidungsmodell von Johänntgen-Holthoff darstellen, werden bei der Literal-Auflistung nicht aufgeführt. Im (vervollständigten) Netzmodell der Abb. 1 auf S. 40 werden die fehlenden Negate jedoch durch die Transitionen t_i mit i=18,...,34 (außer i=27) ergänzt.

86) Es wird hierbei auf die o.a. Möglichkeit zurückgegriffen, Gleichungen in Systeme aus jeweils zwei komplementären Ungleichungen zu überführen. Der einfacheren Darstellung halber erfolgt in solchen Fällen nur die explizite Anführung einer Gleichung.

(3) $L_3=A_3$: "Aus dem Vorvorjahr liegt kein Verlustrücktrag ($X_{t/-2}$) vor.

<=> US_3 : $X_{t/-2} = 0$

(4) $L_4=A_4$: "Aus dem Vorjahr liegt kein Verlustrücktrag ($X_{t/-1}$) vor.

<=> US_4 : $X_{t/-1} = 0$

(5) $L_5=A_5$: "Der Gewinn nach Abzug der kumulierten Verlustvorträge aus Vorjahren ($G_{t/B}$) ist gleich der Differenz aus dem (körperschaftsteuerrelevanten) Gewinn (G_t) und den (nicht-negativen) Verlustvorträgen der Vorjahre (Z_t)."

<=> US_5 : $G_{t/B} = G_t - Z_t$

(6) $L_6=A_6$: "Im Folgejahr wird kein Verlustvortrag ausgewiesen."

<=> US_6 : $Z_{t+1} = 0$

(7) $L_7=A_7$: "Anwendung des § 10d S. 1 EStG zur Berechnung der Bemessungsgrundlage der Körperschaftsteuer (E_t)."

<=> US_7 : $E_t = G_{t/B} - X_{t+2/-2} - X_{t+1/-1}$

(8) $L_8=A_8$: "Die Größe zur Begrenzung des Verlustrücktrags nach § 8 Abs. 4 KStG ($G_{t/E}$) beträgt Null."

<=> US_8 : $G_{t/E} = 0$ [87)]

(9) $L_9=A_9$: "Die Größe zur Begrenzung des Verlustrücktrags nach § 8 Abs. 4 KStG ($G_{t/E}$) ist gleich der (nicht-negativen) Differenz aus dem Gewinn nach Abzug der kumulierten Verlustvorträge aus den Vorjahren ($G_{t/B}$) und der Bruttoausschüttung ($X_{a,t/b}$)."

<=> US_9 : $G_{t/E} = G_{t/B} - X_{a,t/b}$

(11) $L_{11}=A_{11}$: "Die Bemessungsgrundlage der Körperschaftsteuer nach § 10d S. 1 EStG (E_t) beträgt Null."

<=> US_{11} : $E_t = 0$

(12) $L_{12}=A_{12}$: "Es erfolgt für das Folgejahr keine Korrektur des kumulierten (und um den körperschaftsteuerrelevanten Gewinn gekürzten) Verlustvortrags aus den Vorjahren."

<=> US_{12} : $Z_{t+1} = Z_t - G_t$

---

87) Diese Aussage wird von Johänntgen-Holthoff (1986), S. 213, unter der zweideutigen Numerierung (8) und (10) angeführt; die letztgenannte Nummer bleibt hier infolge Redundanz unberücksichtigt.

(13) $L_{13}=A_{13}$: "Für das Folgejahr wird der kumulierte (und um den körperschaftsteuerrelevanten Gewinn gekürzte) Verlustvortrag aus den Vorjahren um nicht mehr abzugsfähige Verlustvorträge korrigiert."

<=> US_{13} : $Z_{t+1} = Z_t - G_t - (Z_{t-4} - G_t - G_{t-1} - G_{t-2} - G_{t-3} - G_{t-4})$

(14) $L_{14}=A_{14}$: "Die Bemessungsgrundlage der Körperschaftsteuer vor der Berücksichtigung (A^*_t) von Verlustvor- oder -rückträgen ($G_{t/0}$) ist nicht-negativ."

<=> US_{14} : $G_{t/0} \geqslant 0$

(15) $L_{15}=\neg A_{14}$ ($\neg A^*_t$) <=> US_{15} : $G_{t/0} < 0$

(16) $L_{16}=A_{15}$: "Der körperschaftsteuerrelevante Gewinn (G_t) ist mindestsens so groß wie der (B^*_t) (nicht-negative) kumulierte Verlustvortrag (Z_t) aus den Vorjahren."

<=> US_{16} : $G_t \geqslant Z_t$

(17) $L_{17}=\neg A_{15}$ ($\neg B^*_t$) <=> US_{17} : $G_t < Z_t$

(18) $L_{18}=A_{16}$: "Der Gewinn nach Abzug der kumulierten Verlustvorträge aus den Vorjahren ($G_{t/B}$) (C^*_t) reicht nicht aus, um die Bruttoausschüttung ($X_{a,t/b}$) zu decken."

<=> US_{18} : $G_{t/B} < X_{a,t/b}$ 88)

(19) $L_{19}=\neg A_{16}$ ($\neg C^*_t$) <=> US_{19} : $G_{t/B} \geqslant X_{a,t/b}$

(20) $L_{20}=A_{17}$: "Die Verlustvorträge des Jahres t-4 wurden bis zum Referenzjahr t ausgegli- (D^*_t) chen."

<=> US_{20} : $Z_{t-4} \leqslant G_t+G_{t-1}+G_{t-2}+G_{t-3}+G_{t-4}$

(21) $L_{21}=\neg A_{17}$ ($\neg D^*_t$)

<=> US_{21} : $Z_{t-4} > G_t+G_{t-1}+G_{t-2}+G_{t-3}+G_{t-4}$

Zur Modellierung der einschlägigen steuerrechtlichen Vorschriften werden von Johänntgen-Holthoff aus den atomaren Aussagen A_j (j=1,...,17 ohne j=10) die nachfolgend aufgelisteten Subjugate als zusammengesetzte Aussagen A_r abgeleitet. Ergänzt wird die äquivalente Ausdrucksweise in der Form von Klauseln K_h, die für die Konstruktion des Netzmodells erforderlich sind:

---

88) Johänntgen-Holthoff (1986), S. 207, verwendet hier zwar das Symbol "$\leqslant$", widerspricht hierdurch aber ihrer umgangssprachlichen Formulierung von Aussage C_t.

(22) $A_{1,2,3,4,14}$: $A_{14} \rightarrow (A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge A_4)$
<=> (23) K_1 : $\neg A_{14} \vee A_1$
(24) K_2 : $\neg A_{14} \vee A_2$
(25) K_3 : $\neg A_{14} \vee A_3$
(26) K_4 : $\neg A_{14} \vee A_4$

(27) $A_{5,6,15}$: $A_{15} \rightarrow (A_5 \wedge A_6)$
<=> (28) K_5 : $\neg A_{15} \vee A_5$
(29) K_6 : $\neg A_{15} \vee A_6$

(30) $A_{7,14,15}$: $(A_{14} \wedge A_{15}) \rightarrow A_7$
<=> (31) K_7 : $\neg A_{14} \vee \neg A_{15} \vee A_7$

(32) $A_{8,14,15,16}$: $(A_{14} \wedge A_{15} \wedge A_{16}) \rightarrow A_8$
<=> (33) K_8 : $\neg A_{14} \vee \neg A_{15} \vee \neg A_{16} \vee A_8$

(34) $A_{9,14,15,16}$: $(A_{14} \wedge A_{15} \wedge \neg A_{16}) \rightarrow A_9$
<=> (35) K_9 : $\neg A_{14} \vee \neg A_{15} \vee A_9 \vee A_{16}$

(36) $A_{8,11,14,15}$: $(A_{14} \wedge \neg A_{15}) \rightarrow (A_8 \wedge A_{11})$
<=> (37) K_{10} : $\neg A_{14} \vee A_8 \vee A_{15}$
(38) K_{11} : $\neg A_{14} \vee A_{11} \vee A_{15}$

(39) $A_{12,14,15,17}$: $(A_{14} \wedge \neg A_{15} \wedge A_{17}) \rightarrow A_{12}$
<=> (40) K_{12} : $\neg A_{14} \vee \neg A_{17} \vee A_{12} \vee A_{15}$

(41) $A_{13,14,15,17}$: $(A_{14} \wedge \neg A_{15} \wedge \neg A_{17}) \rightarrow A_{13}$
<=> (42) K_{13} : $\neg A_{14} \vee A_{13} \vee A_{15} \vee A_{17}$

Aus den 16 atomaren Aussagen A_j (j=1,...,17 mit Ausnahme von j=10[89]), die auf die Stellen s_j und die Transitionen t_i (i=1,...,34 außer i=10,27) abgebildet werden, und den 13 Klauseln K_h (h=1,...,13), denen die Transitionen t_i (i=h+34) entsprechen, wird nach Maßgabe der Regeln für die Transformation von logischen Sachverhalten in Netzmodelle das Stelle/Transition-Netz abgeleitet, das in Abb. 1 wiedergegeben ist. Auf dieses Netzmodell kann - wie oben ausgeführt - die Invariantenanalyse von Petrinetzen angewendet werden, um die Analyseergebnisse in ein integriertes Gesamtmodell umzusetzen. Auf diese letzten beiden Schritte wird hier verzichtet, da sie nur noch die schematische, rein algebraische Auswertung des Netzmodells betreffen.

89) Vgl. zu dieser Ausnahme die Anmerkung in Fußnote 87).

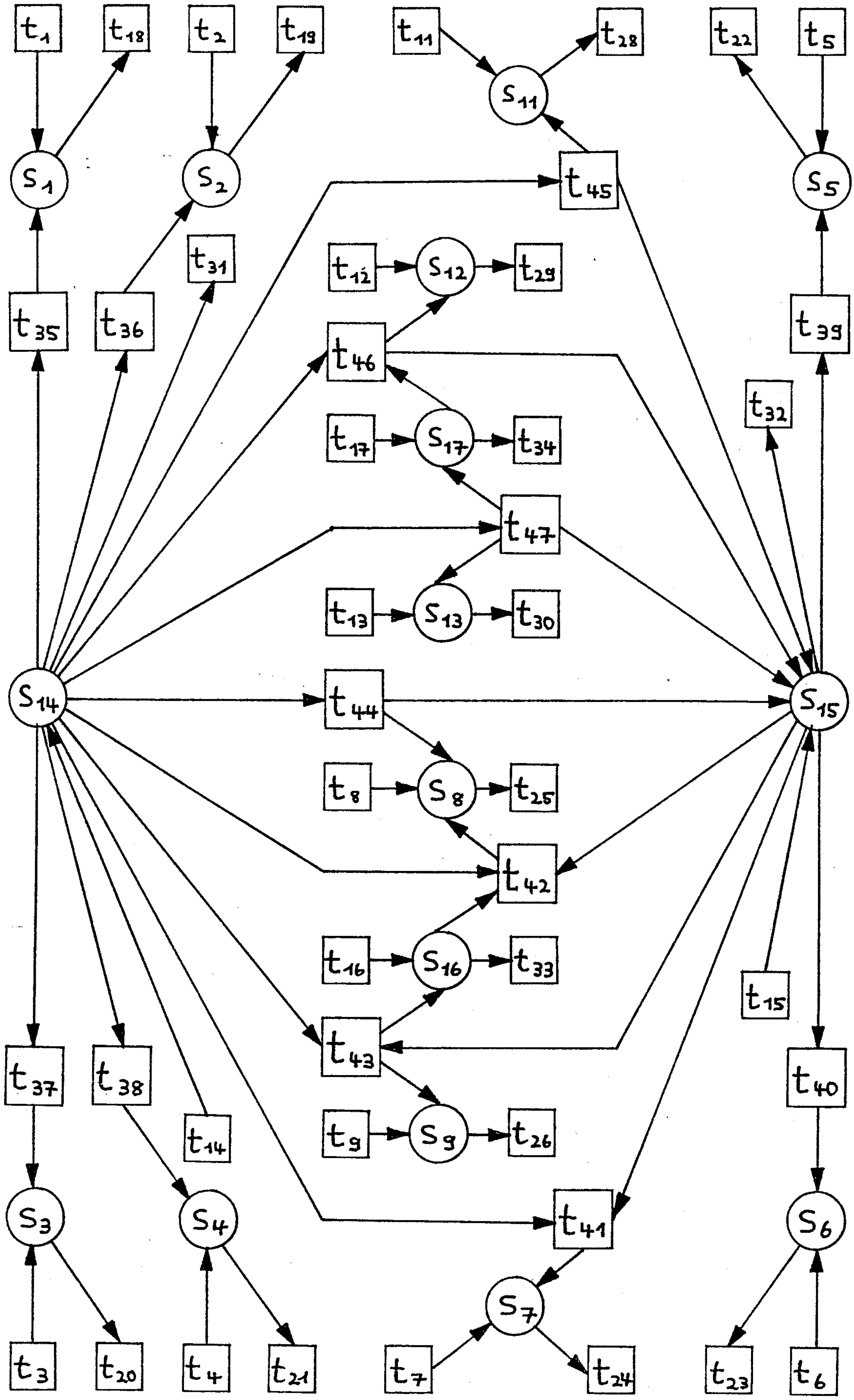

Abb. 1 : Netzmodell zur Repräsentation von logischen Sachverhalten

Ein Vergleich des Netzmodells aus Abb. 1 mit dem entsprechenden Ausschnitt[90] aus dem Entscheidungsmodell, das von Johänntgen-Holthoff auf der Basis von Logikvariablen entwickelt wurde (algebraisches Modell), zeigt, daß das Netzmodell partiell kompakter ausfällt. Zwar erfordert das algebraische Modell die Einführung von nur 24+13=37 Logikvariablen, während bei der Invariantenanalyse des Netzmodells mit 16+16+13=45 Transitionen 45 Variablen berücksichtigt werden müssen, welche die Schaltanzahlen dieser Transitionen im Schaltvektor $\underline{t}$ angeben. Doch treten an die Stelle von 68 Zeilen (Ungleichungen) zur Repräsentation der Beziehungen zwischen den Logikvariablen im algebraischen Modell bei der Invariantenanalyse des Netzmodells nur die 16 Zeilen des zu lösenden linear-ganzzahligen, homogenen Gleichungssystems HGS.

Darüber hinaus erweist sich nach Ansicht des Verf. die graphische Darstellung der logischen Sachverhalte, die im Netzmodell der Abb. 1 erfolgt, wesentlich übersichtlicher und transparenter als die entsprechende Repräsentation im algebraischen Modell, die sich über drei Seiten erstreckt[91]. Daher eignen sich Netzmodelle insbesondere auch als verständniserleichternde Mittel zur Kommunikation über Eigenschaften (z.B. Korrektheit oder Konsistenz) der Modellierung von logischen Sachverhalten92).

---

90) Vgl. Johänntgen-Holthoff (1986), S. 217ff.
91) Vgl. Johänntgen-Holthoff (1986), S. 217ff.
92) Vgl. Fidelak (1986a), S. 108.

Literaturverzeichnis

Azema,P., G. Juanole, E. Sanchis u. M. Montbernard: Specification and Verification of Distributed Systems Using Prolog Interpreted Petri Nets, in: o.V.: Proceedings of the IEEE Software Engineering Conference 1984, o.O. (New York) 1984, S. 510-518.

Bibel,W.: Automated Theorem Proving, Braunschweig - Wiesbaden 1982.

Bitz,M.: Die Strukturierung ökonomischer Entscheidungsmodelle, Wiesbaden 1977.

Bonczek,R.H., C.W. Holsapple u. A.B. Whinston: A Generalized Decision Support System Using Predicate Calculus and Network Data Base Management, in: Operations Research, Vol. 29 (1981), S. 263-281.

Boos,J.: Lokalisierung von Meßstellen für ein Informations-System zur Energiebewirtschaftung in industriellen Betrieben - Entwicklung eines OR-Modells mit einem Lösungsvorschlag -, Arbeitsbericht 1/1986 am Seminar für (Allgemeine Betriebswirtschaftslehre und) Fertigungswirtschaft der Universität Köln, Köln 1986.

Bullers,W.I., S.Y. Nof u. A.B. Whinston: Artificial Intelligence in Manufacturing Planning and Control, in: AIIE Transactions, Vol. 12 (1980), S. 351-363.

Chang,C.-L. u. R.C.-T. Lee: Symbolic Logic and Mechanical Theorem Proving, New York - London 1973.

Ellinger,T.: Operations Research - Eine Einführung, 2. Aufl., Berlin - Heidelberg - New York - Tokyo 1985.

Feldbrugge,F.: Petri Net Tools, in: Rozenberg,G. (Hrsg.): Advances in Petri Nets 1985, Lecture Notes in Computer Science 222, Berlin - Heidelberg - New York - Tokyo, S. 203-223.

Fidelak,M.: Wissensdarstellung und -verarbeitung auf der Basis von Petri-Netzen, Diplomarbeit am Fachbereich Informatik der Universität Bonn, Bonn 1986 (a).

Fidelak,M.: Petri-Netze - Eine formale Sprache zur Wissensrepräsentation, in: Rundbrief des Fachausschusses 1.2 Künstliche Intelligenz & Mustererkennung in der Gesellschaft für Informatik, Nr. 43 (1986), S. 32-38.

Forrest,J.J.H., J.P.H. Hirst u. J.A. Tomlin: Practical Solution of Large Mixed Integer Programming Problems with UMPIRE, in: Management Science, Vol. 20 (1974), S. 736-773.

Gabriel,R.: Optimierungsmodelle bei logischen Verknüpfungen - Modellaufbau und Modellösung von Mixed-Integer-Problemen bei qualitativen Anforderungen, München 1982.

Genrich,H.J., K. Lautenbach u. P.S. Thiagarajan: Elements of General Net Theory, in: Brauer,W. (Hrsg.): Net Theory and Applications, Proceedings of the Advanced Course on General Net Theory of Processes and Systems, 8.-19.10.1979 in Hamburg, Lecture Notes in Computer Science 84, Berlin - Heidelberg - New York 1980, S. 21-163.

Genrich,H.J. u. K. Lautenbach: System Modelling With High-Level Petri Nets, in: Theoretical Computer Science, Vol. 13 (1981), S. 109-136.

Giordana,A. u. L. Saitta: Modeling Production Rules by Means of Predicate Transition Networks, in: Information Sciences, Vol. 35 (1985), S. 1-41.

Jantzen,M. u. R. Valk: Formal Properties of Place/ Transition Nets, in: Brauer,W. (Hrsg.): Net Theory and Applications, Proceedings of the Advanced Course on General Net Theory of Processes and Systems, 8.-19.10. 1979 in Hamburg, Lecture Notes in Computer Science 84, Berlin - Heidelberg - New York 1980, S. 165-212.

Johänntgen-Holthoff,M.: Entscheidungsmodell der Jahresabschlußgestaltung für Publikumsaktiengesellschaften, Dissertation an der Universität Köln 1985, Witterschlick/Bonn 1986.

Kern,W.: Operations Research - Eine Einführung in die Optimierungs-Rechnung, 5. Aufl., Stuttgart 1974.

Lautenbach,K. u. A. Pagnoni: On the Various High-Level Petri Nets and their Invariants, in: Newsletter 16 (1984) der Special Interest Group "Petri Nets and Related System Models" der Gesellschaft für Informatik, S. 20-36.

Lautenbach,K.: On Logical and Linear Dependencies, Arbeitspapiere der GMD (Gesellschaft für Mathematik und Datenverarbeitung mbH/Bonn) Nr. 147, Sankt Augustin 1985.

Laux,H.: Entscheidungstheorie - Grundlagen, Berlin - Heidelberg - New York 1982.

Mainz,U.: Netztheoretische Repräsentation prädikatenlogischer Bgriffe und Methoden, Diplomarbeit am Institut für Informatik der Universität Bonn, Bonn 1984.

Müller-Merbach,H.: The Future of Operational Research - Under the Light of the 5th Generation Computers, Paper presented at the Annual Conference of APDIO, Portugal, April 1984, Kaiserslautern 1984.

Onai,R., M. Aso, H. Shimizu, K. Masuda u. A. Matsumoto: Architecture of a Reduction-Based Parallel Inference Machine: PIM-R, in: New Generation Computing, Vol. 3 (1985), S. 197-228.

Pascoletti,K.-H.: Diophantische Systeme und Lösungsmethoden zur Bestimmung aller Invarianten in Petri-Netzen, Dissertation an der Universität Bonn, Bonn 1985.

Reisig,W.: Petri Nets - An Introduction, EATCS Monographs on Theoretical Computer Science Vol. 4, Berlin - Heidelberg - New York - Tokyo 1985.

Robinson,J.A.: A Machine-Oriented Logic Based on the Resolution Principle, in: Communications of the ACM, Vol. 12 (1965), S. 23-41.

Stegmüller,W.: Probleme und Resultate der Wissenschaftstheorie und Analytischen Philosophie, Bd. I: Erklärung - Begründung - Kausalität, 2. Aufl., Berlin - Heidelberg - New York 1983.

Thornton,P.: Expert Systems - The Challenge for OR, in: Ohse,D., A.C. Esprester, H.-U. Küpper, P. Stähly u. H. Steckhan (Hrsg.): Operations Research Proceedings 1984, DGOR - Vorträge der 13. Jahrestagung, 12.-14.09.1984 in Sankt Gallen, Berlin - Heidelberg - New York - Tokyo 1985, S. 277-284.

Westphal,H.: Eine Beurteilung paralleler Modelle für Prolog, in: Hommel,G. u. S. Schindler (Hrsg.): GI - 16. Jahrestagung I: Informatik-Anwendungen - Trends und Perspektiven, Proceedings, 6.-10.10.1986 in Berlin, Informatik-Fachberichte 126, Berlin - Heidelberg - New York - London - Paris - Tokyo 1986, S. 227-240.

Whitehead,A.N. u. B. Russel: Principia Mathematica, Vol. 1, 2. Aufl., Cambridge (Großbritannien) 1925.

Williams,H.P.: Model Building in Mathematical Programming, 2. Aufl., Chichester- New York - Brisbane - Toronto - Singapore 1985.

Zelewski,S.: Das Leistungspotential der Künstlichen Intelligenz - eine informationstechnisch-betriebswirtschaftliche Analyse, Dissertation am Seminar für Allgemeine Betriebswirtschaftslehre und Fertigungswirtschaft der Universität Köln 1985, Witterschlick/Bonn 1986 (a).

Zelewski,S.: Netztheoretische Fundierung von parallelen Algorithmen für die Lösung linear-ganzzahliger OR-Modelle, Arbeitsbericht 9/1986 am Seminar für Allgemeine Betriebswirtschaftslehre, Industriebetriebslehre und Produktionswirtschaft der Universität Köln, Köln 1986 (b).

Zisman,M.D.: Use of Production Systems for Modeling Asynchronous, Concurrent Processes, in: Waterman,D.A. u. F. Hayes-Roth (Hrsg.): Pattern-Directed Inference Systems, Orlando - San Diego - ... - Sydney - Tokyo 1978, S. 53-68.

Verzeichnis der Arbeitspapiere des Seminars für Allgemeine Betriebswirtschaftslehre, Industriebetriebslehre und Produktionswirtschaft der Universität zu Köln

(bis Sommer 1986: Seminar für Allgemeine Betriebswirtschaftslehre und Fertigungswirtschaft)

Nr. 1: ZELEWSKI, STEPHAN: Entscheidungsmodelle zur Verschrottung von Fertigungshilfsmitteln, Köln 1984.

Nr. 2: KERN, WERNER; ZELEWSKI, STEPHAN: Ein Zuordnungsmodell für Meßgeräte in Energie-Informations-Systemen, Köln 1985.

Nr. 3: KERN, WERNER; PETERS, ULRICH: Energiebewirtschaftung in industriellen Betrieben - Bericht über eine Befragung, Köln 1985.

Nr. 4: BOOS, JOCHEN: Lokalisierung von Meßstellen für ein Informations-System zur Energiebewirtschaftung in industriellen Betrieben - Entwicklung eines OR-Modells mit einem Lösungsvorschlag -, Köln 1986.

Nr. 5: ZELEWSKI, STEPHAN: Ansätze der Künstlichen Intelligenz-Forschung zur Unterstützung der Netzplantechnik, Köln 1986.

Nr. 6: ZELEWSKI, STEPHAN: Schnittstellen bei betrieblichen Informationssystemen - eine Darstellung aus systemtheoretischer und betriebswirtschaftlicher Sicht -, Köln 1986.

Nr. 7: ZELEWSKI, STEPHAN: Konzepte für Frühwarnsysteme und Möglichkeiten zu ihrer Fortentwicklung durch Beiträge der Künstlichen Intelligenz, Köln 1986.

Nr. 8: ZELEWSKI, STEPHAN: Das Konzept der unscharfen Mengen unter besonderer Berücksichtigung ihrer linguistischen Interpretation - eine Lösung für unscharfe Probleme? -, Köln 1986.

Nr. 9: ZELEWSKI, STEPHAN: Der tau-Wert: Aspekte eines neueren spieltheoretischen Ansatzes zur fairen Preisbildung aus kostenrechnerischer Perspektive, Köln 1986.

Nr. 10: ZELEWSKI, STEPHAN: Competitive Bidding aus der Sicht des Ausschreibers - ein spieltheoretischer Ansatz -, Köln 1986.

Nr. 11: ZELEWSKI, STEPHAN: Netztheoretische Ansätze zur Konstruktion und Auswertung von logisch fundierten Problembeschreibungen, Köln 1986.

Nr. 12: ZELEWSKI, STEPHAN: Netztheoretische Fundierung von parallelen Algorithmen für die Lösung linear-ganzzahliger OR-Modelle, Köln 1986.

Nr. 13: ZELEWSKI, STEPHAN: Intelligente Informationsbanksysteme - benutzerfreundliche Instrumente für die Informationsvermittlung? -, Köln 1986.

Nr. 14: ZELEWSKI, STEPHAN: Komplexitätstheorie - ihr Beitrag zur Klassifizierung und Beurteilung von Problemen des Operations Research -, Köln 1986.

Nr. 15: ZELEWSKI, STEPHAN: Der Informationsbroker, Köln 1986.

Nr. 16: ZELEWSKI, STEPHAN: Soziale Verantwortbarkeit von Technologien, Köln 1986.

Nr. 17: ZELEWSKI, STEPHAN: Expertensysteme - Übersicht über Konzeptionen und betriebswirtschaftliche Anwendungsmöglichkeiten -, Köln 1986.

Nr. 18: ZELEWSKI, STEPHAN: Das Leistungspotential der Künstlichen Intelligenz für Industrieanwendungen - Ein Überblick -, Köln 1987.

Nr. 19: ZELEWSKI, STEPHAN: Expertensysteme im "Büro der Zukunft" - Ein Überblick über Anwendungsperspektiven und Bewertungsaspekte -, Köln 1987.